

Übungsblatt 5

Aufgabe P1 *Unabhängige geometrische Verteilungen.*

Es seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit geometrischer Verteilung. Zeigen Sie, dass dann auch $Z = \min(X, Y)$ geometrisch verteilt ist.

Aufgabe P2 *Korrelation und Unabhängigkeit.*

Definition: Zwei Zufallsvariablen U und V heißen **unkorreliert**, falls $\text{Cov}(U, V) = 0$.

Seien X und Y unabhängig mit $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p$, wobei $p \in (0, 1)$.

- a) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert?
- b) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig?

Aufgabe P3 *Würfelspiel.*

Zwei Spieler A und B würfeln abwechselnd mit einem fairen Würfel, wobei A beginnt. Wer die erste 6 würfelt gewinnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A ?

Aufgabe H1 Charakterisierung der geometrischen Verteilung als gedächtnislos.

Eine diskrete Zufallsvariable X mit Wertebereich \mathbb{N} heißt *gedächtnislos*, falls sie die Bedingung

$$\mathbb{P}(X > y + x | X > x) = \mathbb{P}(X > y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass eine diskrete Zufallsvariable X genau dann gedächtnislos ist, wenn sie geometrisch verteilt ist.

Hinweis: Für die erste Richtung: Unter Annahme der Gedächtnislosigkeit kann für $g(x) := \mathbb{P}(X > x)$ gezeigt werden, dass $g(x+1) = g(1) \cdot g(x)$ gilt.

Lösung: Insgesamt fünf Punkte.

Erstellt von Meier-Hans 10.11.2015, modifiziert von Alexander Klump 11.2021

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt (wurde in der Präsenzübung auch schon gezeigt)

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} \cdot p = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i+k} = p \cdot (1-p)^k \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = p(1-p)^k \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k.$$

Somit gilt $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$ (1P). Nun zeigen wir, dass dies genau dann gilt, wenn X gedächtnislos ist.

Sei X geometrisch verteilt. Es gilt also $\mathbb{P}(X > i) = q^i$ für $q := 1 - p$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(X > y + x | X > x) = \frac{\mathbb{P}(X > y + x, X > y)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{\mathbb{P}(X > y + x)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{q^{y+x}}{q^x} = q^y = \mathbb{P}(X > y).$$

Also ist X gedächtnislos. (2P)

Nun sei X gedächtnislos. Es gelte also $\mathbb{P}(X > y + x | X > x) = \mathbb{P}(X > y)$. Es sei $g(x) := \mathbb{P}(X > x)$, dann gilt

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \mathbb{P}(X > x+1) = \mathbb{P}(X > x+1 | X > x) \cdot \mathbb{P}(X > x) \\ &= \mathbb{P}(X > 1) \cdot \mathbb{P}(X > x) = g(1) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Nun gilt $g(1) = q$ für ein $q \in (0, 1)$ und sei $p := 1 - q$. Induktiv folgt $g(k) = q^k$ und somit

$$\mathbb{P}(X = k) = g(k-1) - g(k) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1} \cdot (1 - q) = q^{k-1} \cdot p.$$

Also handelt es sich um eine geometrische Verteilung. (2P)

Aufgabe H2 .

- a) Sei U gleichverteilt auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Es seien X_1, \dots, X_n unabhängig von U und Bernoulli-verteilt mit Parameter p . Berechnen Sie

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^U X_i \right].$$

- b) Es seien X, Y unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen zum Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie

$$\mathbb{E} \left[\frac{Y + 1 - X}{Y + 1} \right].$$

Hinweis: Sollte es notwendig sein $\mathbb{E}[X]$ zu bestimmen, ist eine explizite Rechnung gefordert, da dies in der Vorlesung nicht berechnet wurde.

Lösung: Insgesamt fünf Punkte. a) Man kann entweder auf U bedingen (wie in der Formel von H3 auf Blatt 4) oder Fallunterscheidung für U machen. Wir machen letzteres:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^U X_i \right] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[1_{\{U=k\}} \sum_{i=1}^U X_i \right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[1_{\{U=k\}} \sum_{i=1}^k X_i \right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[1_{\{U=k\}}] \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^k X_i \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(U = k) \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^k X_i \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X_i] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k p = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{p}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{p}{2} \cdot (n+1) \end{aligned}$$

(2P)

- b) Wir berechnen unter Ausnutzung der Unabhängigkeit

$$\mathbb{E} \left[\frac{Y + 1 - X}{Y + 1} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Y + 1}{Y + 1} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{X}{Y + 1} \right] = 1 - \mathbb{E}[X] \mathbb{E} \left[\frac{1}{Y + 1} \right].$$

(0,5P)

Es ist also $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[1/(Y + 1)]$ zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda. \end{aligned}$$

(1P) und

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{1}{Y + 1} \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k + 1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k + 1)!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k + 1)!} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

(1P)

Also gilt

$$\mathbb{E} \left[\frac{Y + 1 - X}{Y + 1} \right] = 1 - \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}.$$

(0,5P)

Aufgabe H3 Rechnen mit Verteilungen.

- a) Seien X_1, X_2 unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter p .
Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.
- b) Sei X binomial verteilt mit Parameter n und p . Berechnen Sie $\mathbb{E}[X(X-1)]$.

Lösung:

a) Um die Unabhängigkeit verwenden zu können, müssen wir zuerst $X_1 = X_2$ in eine Eigenschaft von X_1 und eine Eigenschaft von X_2 aufspalten. Dazu machen wir eine Fallunterscheidung bezüglich des gleichen Werts:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = X_2, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{k-1} = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)^2]^{k-1} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.\end{aligned}$$

b) **Variante I:**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_k k(k-1) \rho_X(k) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

Dabei fällt der Summand für $k=0, k=1$ weg und

$$k(k-1) \binom{n}{k} = k(k-1) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Durch Ersetzen von k durch $k' := k-2$ erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] &= n(n-1) \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} p^{k'+2} (1-p)^{n-k'-2} \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} p^{k'} (1-p)^{n-2-k'} = n(n-1) p^2\end{aligned}$$

da nach dem Binomialsatz die letzte Summe gleich $(p+1-p)^{n-2} = 1$ ist.

Variante II: Alternativ benutzt man, dass $\mathbb{E}[X] = np$, $\text{Var}(X) = np(1-p)$ und wegen $np(1-p) = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - (np)^2$ ist $\mathbb{E}[X^2] = np(1-p) + (np)^2$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}[X^2 - X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] = np(1-p) + (np)^2 - np = np(1-p + np - 1) = n(n-1)p^2$$

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): Mittwoch, 24. November, 13:00 Uhr

Viel Erfolg! :)