

## Wiederholungsaufgaben 2

### Aufgabe 1 .

Die Bevölkerung von Musterstadt setzt sich zusammen aus 30% Studierenden, 20% Schülern und sonstigen Menschen. 60% aller Schüler können einen Web-Browser bedienen, von den Studenten sind es 80% und von den sonstigen 30%. Sie führen in Musterstadt eine Umfrage durch mit einer zufälligen Person durch.

- (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann diese Person den Web-Browser bedienen?
- (b) Jetzt haben Sie bereits festgestellt, dass die Person den Web-Browser bedienen kann. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört die Person dann zur Gruppe der Studierenden.

### Aufgabe 2 .

Ein gewisses Würfelspiel besteht aus drei Runden, in denen jeweils zwei faire Würfel geworfen werden und die Differenz der beiden Augenzahlen notiert wird. Aus den drei Betragsdifferenzen der jeweiligen Runde zählt schließlich das Maximum. (*Beispiel:* Die Würfelwürfe 2&5 in Runde 1, 6&6 in Runde 2 und 4&3 in Runde 3 führen zu den Differenzen 3, 0 und 1. Das Endergebnis ist damit 3.)

- (a) Geben Sie einen geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  an.
- (b) Definieren Sie formal präzise Zufallsvariablen  $R_1, R_2$  und  $R_3$ , welche die Augenzahldifferenz aus Runde 1, 2 und 3 angeben.
- (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein Endergebnis größer 3.

### Aufgabe 3 .

Gegeben Sie der diskrete zufällige Vektor  $(X, Y)$ . Die Verteilungsfunktion sei durch folgende Tabelle gegeben:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,2	0,1	0
2	0	0,1	0
3	0,1	0	0,1
4	0,2	0,1	0,1

- (a) Berechnen Sie die Randverteilungen von  $X$  und  $Y$ .
- (b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von  $X$  und  $Y$ .
- (c) Berechnen Sie die Kovarianz von  $X$  und  $Y$ .

- (d) Entscheiden Sie, ob  $X$  und  $Y$  unabhängig sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

#### Aufgabe 4 .

Gegeben sei die Funktion

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für ein geeignetes  $a > 0$  sei dies die Dichte einer Zufallsvariablen  $X$ .

- (a) Man bestimme  $a$  so, dass  $f_X(x)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$ .
- (c) Zeigen Sie  $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2}$  und  $\text{Var}(X) = \frac{3}{20}$ .
- (d) Verwenden Sie die Ungleichung von Chebyshev um eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(|X - \frac{3}{2}| \geq 0,5)$  zu finden.

#### Aufgabe 5 .

Ein idealer Würfel wird 18.000-mal geworfen. Die Zufallsvariable  $X$  gebe die Anzahl der geworfenen Sechsen an.

- (a) Berechnen Sie unter Verwendung einer geeigneten Approximation  $\mathbb{P}(2900 \leq X \leq 3050)$ .
- (b) Berechnen Sie unter Verwendung einer geeigneten Approximation ein  $\Delta \in \mathbb{R}$  so, dass  $\mathbb{P}(3000 - \Delta \leq X \leq 3000 + \Delta) = 0,99$  gilt.

#### Aufgabe 6 .

Wir betrachten die durch  $b > 0$  parametrisierten Dichtefunktionen

$$f_b(x) = \begin{cases} b^2 x e^{-bx}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

einer reellwertigen Zufallsvariablen.

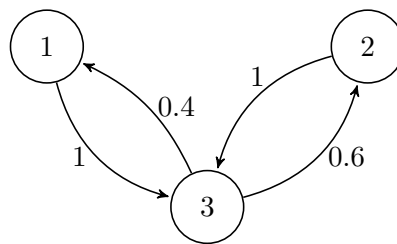
- a) Verwenden Sie die Maximum-Likelihood Methode um den Parameter  $b > 0$  zu schätzen.
- b) Nun ergeben sich die Messwerte 0.4, 3.0 und 0.1 und 1.0. Schätzen Sie den Parameter  $b > 0$  mit dem Maximum-Likelihood Schätzer.

#### Aufgabe 7 .

- (a) Es sei  $X$  eine normalverteilte Zufallsvariable. Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 36$  ergab den Mittelwert  $\bar{x} = 210$  und Stichprobenvarianz  $s^2 = 144$ . Berechnen Sie ein zweiseitiges Intervall das den Erwartungswert von  $X$  mit Wahrscheinlichkeit 0,9 überdeckt.
- (b) Eine Nagelfabrik verkauft Nägel unter der Bezeichnung „100mm-Nägel“. Wie bei allen industriell gefertigten Gütern kommt es auch hier zu Schwankungen. Es kann davon ausgegangen werden, dass die tatsächliche Länge der Nägel einer Normalverteilung entspricht. Die Qualitätssicherung möchte überprüfen, ob diese Nägel wirklich im Mittel 100mm lang sind. Hierzu werden 49 Nägel vermessen. Es ergibt sich eine mittlere Länge von 100,031mm bei einer Stichprobenvarianz von 0,01mm<sup>2</sup>. Kann die Qualitätssicherung bei einem geeigneten Hypothesentest mit 95%-iger Sicherheit behaupten, dass die mittlere Länge nicht stimmt?

### Aufgabe 8 .

Betrachten Sie eine Markov-Kette  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  auf dem Zustandsraum  $E = \{1, 2, 3\}$  mit dem folgenden Übergangsgraphen.



- a) Stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix  $P$  auf.
- b) Beweisen oder widerlegen Sie:  $X$  ist ergodisch.
- c) Bestimmen Sie  $\mathbb{P}(X_6 = 1 \mid X_2 = 1)$ .
- d) Bestimmen Sie alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.

Viel Erfolg!