

Wiederholungsaufgaben 1

Aufgabe 1 *Wahrscheinlichkeitsraum.*

Aus einer Urne mit Kugeln 1, 2, 3, 4 wird dreimal mit Zurücklegen gezogen.

- Geben Sie für das Zufallsexperiment einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an.
- Definieren Sie als explizites mathematisches Objekt auf dem Wahrscheinlichkeitsraum eine Zufallsvariable X , die die Summe der gezogenen Kugelnummern angibt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq 11)$.

Aufgabe 2 *Kombinatorik.*

100 verschiedene Fähnchen sollen auf 25 in einer Reihe stehende Fahnenmasten verteilt werden. Wir sprechen von einer “undiplomatischen Beflaggung”, wenn lediglich für jedes Fähnchen zu entscheiden ist, auf welchem Mast es platziert wird, und von einer “diplomatischen Beflaggung”, wenn darüber hinaus die Reihenfolge der Fähnchen auf jedem einzelnen Mast von Bedeutung ist.

- Wie viele Möglichkeiten der “diplomatischen Beflaggung” bestehen, wenn die Anzahl der Fähnchen je Mast
 - exakt 4 betragen soll?
 - exakt 0 oder 10 sein darf?
 - völlig beliebig ist? (Jeder Mast kann beliebig viele Fähnchen aufnehmen.)
- Wie viele Möglichkeiten bestehen in den o.g. Fällen (i)-(iii), wenn es sich um eine “undiplomatische Beflaggung” handelt?
 - (exakt 4 Fähnchen je Mast)
 - (exakt 0 oder 10 Fähnchen je Mast)
 - (beliebig viele Fähnchen je Mast)

Sie brauchen die Ergebnisse nur soweit zu vereinfachen, wie es ohne Taschenrechner oder Computer möglich ist.

Aufgabe 3 *Verteilungen.*

- Berechnen Sie die Varianz $\text{Var}(X)$ für X gleichverteilt auf $\{0, \dots, N\}$. Hinweise:
 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- b) Zeigen Sie, dass $X := \lfloor Z \rfloor$ geometrisch verteilt ist, wenn $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$ ist. (Hierbei ist $\lfloor \cdot \rfloor$ die ganzzahlige Abrundungsfunktion.)

Aufgabe 4 *Wahrscheinlichkeitstabelle.*

Gegeben sei ein diskreter Zufallsvektor (X, Y) mit Werten in $\{-1, 0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$, dessen Verteilung durch folgende Tabelle gegeben ist:

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0	0.3	0.1
0	0	0	0
1	0.2	0.2	0.2

- Berechnen Sie die Randverteilung von X und Y .
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .
- Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort.
- Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{X \cdot Y}]$.

Aufgabe 5 *Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte.*

Die Verteilung des 2-dimensionalen Zufallsvektors (X, Y) sei gegeben durch die Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = ce^{-x-2y} \cdot \mathbb{1}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}.$$

- Bestimmen Sie c .
- Bestimmen Sie die Verteilung von X und die Verteilung von Y .
- Zeigen oder widerlegen Sie, dass X und Y unabhängig sind.
- Berechnen Sie $\mathbb{P}(X > Y)$.

Aufgabe 6 *Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten.*

Erfahrungsgemäß fliegt jeder Passagier, der einen Flug gebucht hat, nur mit Wahrscheinlichkeit 90% auch wirklich mit. Für den Flug eines Airbus mit 549 Sitzen wurden daher 580 Tickets verkauft. Es kann also passieren, dass der Flug überbucht ist, d.h. dass mehr Passagiere auftauchen als Plätze da sind. Gehen Sie davon aus, dass sich die Personen unabhängig dafür entscheiden zu fliegen und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Flug überbucht ist

- approximativ mit der Normalapproximation ab.
- mit der Markov-Ungleichung ab.

c) mit der Chebyshev-Ungleichung ab.

Aufgabe 7 .

Es soll der unbekannte Parameter $\theta > 0$ für die Verteilung mit der Dichte

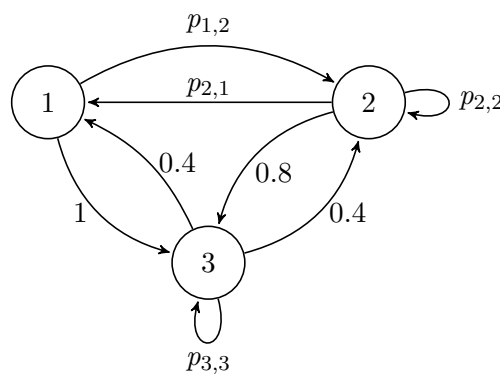
$$f_{\theta}(t) = \begin{cases} \frac{4t^3}{\theta} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\theta} \cdot t^4\right), & t > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

geschätzt werden.

- Geben Sie die zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ gehörende Likelihood-Funktion $L_x(\theta)$ und die Loglikelihood-Funktion $M_x(\theta) := \ln L_x(\theta)$ an.
- Berechnen Sie die Ableitung $M'_x(\theta)$.
- Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}(x)$ für θ zur Stichprobe x .
- Bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion von X_1 , wenn X_1 die Dichte f_{θ} hat. Zeigen Sie dann, dass X_1^4 einer $\text{Exp}(\frac{1}{\theta})$ -Verteilung folgt.
- Ist $\hat{\theta}$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ?

Aufgabe 8 .

Betrachten Sie eine Markov-Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ mit dem folgenden Übergangsgraphen.



Es gelte $p_{2,1} = p_{2,2}$.

- Bestimmen Sie die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten und stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix P auf.
- Beweisen oder widerlegen Sie: X ist ergodisch.
- Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_{12} = 3 \mid X_{10} = 3)$.

- d) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette und begründen Sie, ob diese eindeutig ist.

Viel Erfolg!