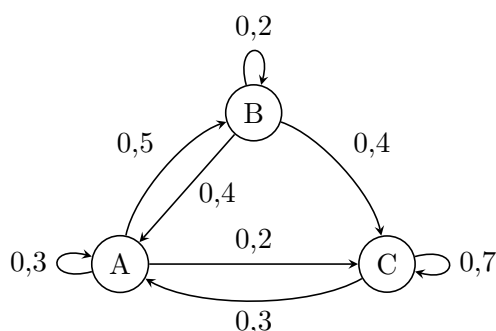


Übungsblatt 14

Aufgabe P1 *MK eines Automaten.*

Das folgende Übertragungsdiagramm beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Überganges von einem der Zustände A, B, C nach A, B, C eines Automaten vom Zeitschritt $i - 1$ zum Zeitschritt i (siehe Abbildung). Der Systemzustand zur Zeit i werde mit X_i bezeichnet.



Begründen Sie, dass es genau eine stationäre Verteilung geben muss und berechnen Sie diese.

Aufgabe P2 *Reversibilität von MK.*

Wir erinnern daran, dass eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ *reversibel* heißt, falls es einen Wahrscheinlichkeitsvektor¹ π gibt, sodass

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \text{für alle } i, j \in E. \quad (\text{R})$$

- Beweisen oder widerlegen Sie: Die Markov-Kette X mit Übergangsmatrix $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, wobei $\alpha + \beta > 0$, ist reversibel.
- Für welche Werte von $p \in (0, 1)$ ist die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

reversibel?

¹Ein Vektor $\pi \in \mathbb{R}^n$ heißt Wahrscheinlichkeitsvektor, falls alle Einträge $\pi_i \geq 0$ sind und $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ gilt.

Aufgabe H1 *MK aus gegebenen Informationen.*

Gegeben sei eine Markov-Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und es sei über das Übergangsverhalten vom Zeitpunkt n nach $n + 1$ folgendes bekannt:

- Ist man im Zustand 1, so verlässt man diesen nicht mehr.
- Ist man im Zustand 2, so springt man je mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einen der Zustände 1, 3 oder 4.
- Ist man im Zustand 3, so springt man je mit gleicher Wahrscheinlichkeit in den Zustand 2 oder 4.
- Ist man im Zustand 4, so springt man in Zustand 5.
- Ist man im Zustand 5, so springt man in Zustand 6.
- Ist man im Zustand 6, so springt man in Zustand 4.

- a) Bestimmen Sie die zu X zugehörige Übergangsmatrix.
- b) Bestimmen Sie alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.

Lösung: Insgesamt vier Punkte.

a) Die Übergangsmatrix lautet **(1P)**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Für eine stationäre Verteilung $\alpha = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6)$ der Markov-Kette muss gelten $\alpha P = \alpha$ und $\sum_{j=1}^6 \alpha_j = 1$ **(0.5P)**. Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 &= \alpha_1 \\ \frac{1}{2}\alpha_3 &= \alpha_2 \\ \frac{1}{3}\alpha_2 &= \alpha_3 \\ \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 + \alpha_6 &= \alpha_4 \\ \alpha_4 &= \alpha_5 \\ \alpha_5 &= \alpha_6. \end{aligned}$$

(0.5P) Man sieht, dass $\alpha' = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ und $\alpha'' = (0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$ die linear unabhängigen Lösungen des Gleichungssystems sind. **(1P)** Insbesondere sind dann alle Konvexkombinationen von α' und α'' Lösungen, d.h. die Menge aller $\alpha = \lambda\alpha' + (1 - \lambda)\alpha''$, $\lambda \in [0, 1]$, ist die Menge der stationären Verteilungen der Markov-Kette. **(1P)**

Aufgabe H2 Stationäre Verteilung aus Reversibilität.

Eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ heißt *reversibel*, falls es einen Wahrscheinlichkeitsvektor² π gibt, sodass

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \text{für alle } i, j \in E. \quad (\text{R})$$

- a) Zeigen Sie, dass aus (R) folgt, dass π eine stationäre Verteilung zu P ist.
- b) Eine Urne enthalte insgesamt $N \in \mathbb{N}$ Kugeln, die entweder rot oder blau sein können. Es bezeichne X_n die Anzahl der blauen Kugeln in der Urne zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$. Im Zeitintervall $(n, n+1)$ wird eine Kugel zufällig und gleichverteilt der Urne entnommen und gegen eine Kugel der anderen Farbe ausgetauscht. Bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix P und finden Sie eine stationäre Verteilung zu P .

Lösung: Insgesamt sechs Punkte.

a) Es sei P die Übergangsmatrix einer reversiblen Markovkette und π ein Wahrscheinlichkeitsvektor, sodass (R) gilt. Wir müssen zeigen, dass $\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij}$ gilt für alle $j \in E$. Sei $j \in E$ beliebig, dann gilt, da P eine stochastische Matrix ist (Zeilensummen sind 1),

$$\sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} \stackrel{(\text{R})}{=} \sum_{i \in E} \pi_j p_{ji} = \pi_j \underbrace{\sum_{i \in E} p_{ji}}_{=1} = \pi_j. \quad (1 \text{ P.})$$

b) Man stellt leicht fest, dass $E = \{0, \dots, N\}$ und $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ mit

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{N}, & \text{falls } i - j = 1, \\ \frac{N-i}{N}, & \text{falls } i - j = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2 \text{ P.})$$

Zur Bestimmung einer stationären Verteilung machen wir uns a) zu Nutze. Wir zeigen dazu, dass die Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ reversibel ist, indem wir einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsvektor π konstruieren, der (R) erfüllt. Da $p_{ij} = 0$ für $|i-j| \neq 1$, $i, j \in E$, brauchen wir nur $\pi_i p_{ij}$ für $j \in \{i \pm 1\}$ zu betrachten. Für $i \in \{0, \dots, N-1\}$ soll gelten $\pi_i p_{i,i+1} = \pi_{i+1} p_{i+1,i}$, was mit den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten äquivalent zu $\pi_i \frac{N-i}{N} = \pi_{i+1} \frac{i+1}{N}$ ist, also $\pi_{i+1} = \frac{N-i}{i+1} \pi_i$. (1 P.) Lösen der Rekursion liefert $\pi_{i+1} = \pi_0 \prod_{j=0}^i \frac{N-j}{j+1} = \frac{N-i}{i+1} \cdot \frac{N-i+1}{i} \dots N \pi_0 = \frac{N!}{(i+1)!(N-(i+1))!} \pi_0 = \binom{N}{i+1} \pi_0$. (1 P.) Da wir einen Wahrscheinlichkeitsvektor haben wollen, muss $\sum_{i=0}^N \pi_i = 1$ sein, was wegen $\sum_{i=0}^N \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} = \pi_0 2^N$ (Binomischer Lehrsatz!) äquivalent zu $\pi_0 = 2^{-N}$ ist (0,5P.). Also liefert nach a) der Vektor π mit $\pi_i = 2^{-N} \binom{N}{i}$ eine stationäre Verteilung für P (0,5 P.).

Abgabe der Hausübungen: bis 4. Februar 2022 13:00 Uhr

²Ein Vektor $\pi \in \mathbb{R}^n$ heißt Wahrscheinlichkeitsvektor, falls alle Einträge $\pi_i \geq 0$ sind und $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ gilt.

Viel Spaß :)