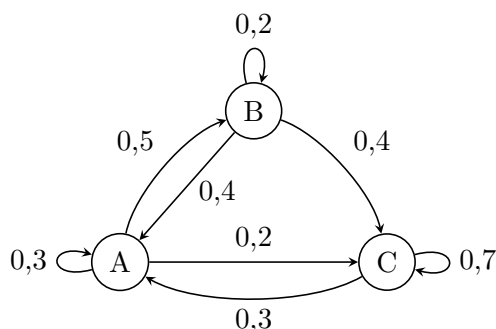


Übungsblatt 14

Aufgabe P1 *MK eines Automaten.*

Das folgende Übertragungsdiagramm beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Überganges von einem der Zustände A, B, C nach A, B, C eines Automaten vom Zeitschritt $i - 1$ zum Zeitschritt i (siehe Abbildung). Der Systemzustand zur Zeit i werde mit X_i bezeichnet.



Begründen Sie, dass es genau eine stationäre Verteilung geben muss und berechnen Sie diese.

Aufgabe P2 *Reversibilität von MK.*

Wir erinnern daran, dass eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ *reversibel* heißt, falls es einen Wahrscheinlichkeitsvektor¹ π gibt, sodass

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \text{für alle } i, j \in E. \quad (\text{R})$$

- Beweisen oder widerlegen Sie: Die Markov-Kette X mit Übergangsmatrix $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, wobei $\alpha + \beta > 0$, ist reversibel.
- Für welche Werte von $p \in (0, 1)$ ist die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

reversibel?

¹Ein Vektor $\pi \in \mathbb{R}^n$ heißt Wahrscheinlichkeitsvektor, falls alle Einträge $\pi_i \geq 0$ sind und $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ gilt.

Aufgabe H1 *MK aus gegebenen Informationen.*

Gegeben sei eine Markov-Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und es sei über das Übergangsverhalten vom Zeitpunkt n nach $n + 1$ folgendes bekannt:

- Ist man im Zustand 1, so verlässt man diesen nicht mehr.
- Ist man im Zustand 2, so springt man je mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einen der Zustände 1, 3 oder 4.
- Ist man im Zustand 3, so springt man je mit gleicher Wahrscheinlichkeit in den Zustand 2 oder 4.
- Ist man im Zustand 4, so springt man in Zustand 5.
- Ist man im Zustand 5, so springt man in Zustand 6.
- Ist man im Zustand 6, so springt man in Zustand 4.

- a) Bestimmen Sie die zu X zugehörige Übergangsmatrix.
- b) Bestimmen Sie alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.

Aufgabe H2 *Stationäre Verteilung aus Reversibilität.*

Eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ heißt *reversibel*, falls es einen Wahrscheinlichkeitsvektor² π gibt, sodass

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad \text{für alle } i, j \in E. \quad (\text{R})$$

- a) Zeigen Sie, dass aus (R) folgt, dass π eine stationäre Verteilung zu P ist.
- b) Eine Urne enthalte insgesamt $N \in \mathbb{N}$ Kugeln, die entweder rot oder blau sein können. Es bezeichne X_n die Anzahl der blauen Kugeln in der Urne zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$. Im Zeitintervall $(n, n + 1)$ wird eine Kugel zufällig und gleichverteilt der Urne entnommen und gegen eine Kugel der anderen Farbe ausgetauscht. Bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix P und finden Sie eine stationäre Verteilung zu P .

Abgabe der Hausübungen: bis 4. Februar 2022 13:00 Uhr

Viel Spaß! :)

²Ein Vektor $\pi \in \mathbb{R}^n$ heißt Wahrscheinlichkeitsvektor, falls alle Einträge $\pi_i \geq 0$ sind und $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ gilt.