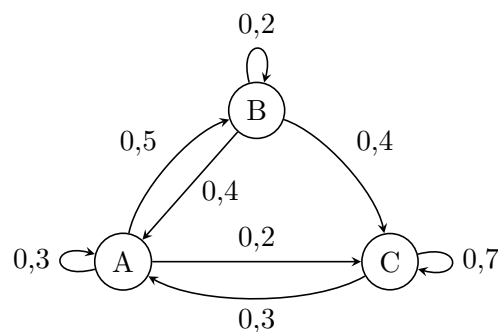


Übungsblatt 13

Aufgabe P1 *Markovketten via Übergangsgraph.*

Das folgende Übertragungsdiagramm beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Überganges von einem der Zustände A, B, C nach A, B, C eines Automaten vom Zeitschritt $i - 1$ zum Zeitschritt i (siehe Abbildung). Der Systemzustand zur Zeit i werde mit X_i bezeichnet.



- Man stelle die Übergangsmatrix auf.
- Zur Zeit $i = 0$ befinde sich das System mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit in den Zuständen A, B, C :

$$\pi_0 = (\mathbb{P}(X_0 = A) = 0,3; \mathbb{P}(X_0 = B) = 0,2; \mathbb{P}(X_0 = C) = 0,5).$$

Man Berechne

- $\mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = C | X_0 = B),$
- $\mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = C),$
- $\mathbb{P}(X_2 = B, X_0 = B).$

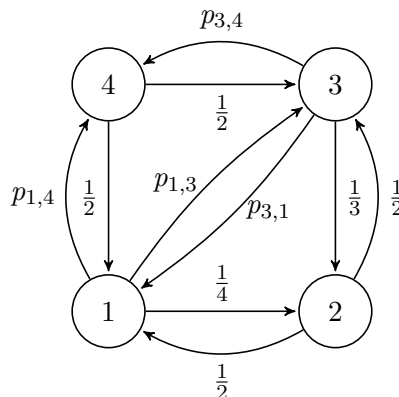
Aufgabe P2 *MK aus fairem Münzwurf.*

Ein fairer Würfel wird wiederholt geworfen. Es sei X_n der Rest der Augensumme der ersten n Würfe bei Division durch 4, wobei wir $X_0 = 0$ setzen.

- Zeigen Sie, dass $X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette ist und bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix.
- Angenommen, man hat nach 7 Würfeln eine durch 4 teilbare Augensumme erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach zwei weiteren Würfeln eine Augensumme, die
 - wieder durch 4 teilbar ist,
 - bei Division durch 4 den Rest 3 liefert,
 - nicht durch 4 teilbar ist?

Aufgabe H1 *Unvollständiger Übergangsgraph.*

Gegeben sei der folgende Übergangsgraph einer Markovkette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3, 4\}$.



Dabei gelte $p_{1,3} = p_{1,4}$ und $p_{3,1} = \frac{1}{2}p_{3,4}$.

- a) Bestimmen Sie die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten und geben Sie die Übergangsmatrix P zu der Markov-Kette X an.
- b) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten, wenn als Startverteilung $\alpha = \frac{1}{4}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$ vorgegeben ist:
 - (i) $\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3 | X_0 = 4)$
 - (ii) $\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3)$
 - (iii) $\mathbb{P}(X_2 = 4 | X_0 = 1)$
 - (iv) $\mathbb{P}(X_2 = 4, X_0 = 1)$.

Aufgabe H2 *MK via Übergangsmatrix.*

Gegeben sei eine Markov-Kette $X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$P = (p_{ij})_{i,j \in E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen zu X .
- b) Beantworten Sie folgenden Fragen mit entsprechender Begründung:
 - (i) Gilt $1 \rightsquigarrow 4$, $5 \rightsquigarrow 1$ und $5 \rightsquigarrow 5$?
 - (ii) Ist X irreduzibel?

(iii) Sind alle Zustände aperiodisch?

Aufgabe H3 *MK aus Urnenmodell.*

Eine Urne enthalte zum Zeitpunkt 0 eine weiße und eine schwarze Kugel. Beim Übergang vom Zeitpunkt n zu Zeitpunkt $n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, wird eine Kugel zufällig und gleichverteilt ausgewählt, der Urne entnommen und mit einer weiteren Kugel der gezogenen Farbe zurückgelegt. Es sei $X_n := (W_n, S_n)$, wobei W_n die Anzahl der weißen und S_n die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Urne nach n Schritten bezeichnen. Dadurch erhält man eine Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}^2$.

- a) Bestimmen Sie die zugehörigen (1-Schritt-)Übergangswahrscheinlichkeiten.
- b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbb{P}(X_n = (k, n + 2 - k)) = \frac{1}{n + 1} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n + 1\}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Beweistechnik der vollständigen Induktion.

Abgabe der Hausübungen: Mittwoch, 2. Februar, 13:00 Uhr

Viel Spaß! :)