

Übungsblatt 5

Aufgabe P1 *Unabhängige geometrische Verteilungen.*

Es seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit geometrischer Verteilung. Zeigen Sie, dass dann auch $Z = \min(X, Y)$ geometrisch verteilt ist.

Aufgabe P2 *Korrelation und Unabhängigkeit.*

Definition: Zwei Zufallsvariablen U und V heißen **unkorreliert**, falls $\text{Cov}(U, V) = 0$.

Seien X und Y unabhängig mit $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p$, wobei $p \in (0, 1)$.

- a) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert?
- b) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig?

Aufgabe P3 *Würfelspiel.*

Zwei Spieler A und B würfeln abwechselnd mit einem fairen Würfel, wobei A beginnt. Wer die erste 6 würfelt gewinnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A ?

Aufgabe H1 *Charakterisierung der geometrischen Verteilung als gedächtnislos.*

Eine diskrete Zufallsvariable X mit Wertebereich \mathbb{N} heißt *gedächtnislos*, falls sie die Bedingung

$$\mathbb{P}(X > y + x | X > x) = \mathbb{P}(X > y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass eine diskrete Zufallsvariable X genau dann gedächtnislos ist, wenn sie geometrisch verteilt ist.

Hinweis: Für die erste Richtung: Unter Annahme der Gedächtnislosigkeit kann für $g(x) := \mathbb{P}(X > x)$ gezeigt werden, dass $g(x+1) = g(1) \cdot g(x)$ gilt.

Aufgabe H2 .

- a) Sei U gleichverteilt auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Es seien X_1, \dots, X_n unabhängig von U und Bernoulli-verteilt mit Parameter p . Berechnen Sie

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^U X_i \right].$$

- b) Es seien X, Y unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen zum Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie

$$\mathbb{E} \left[\frac{Y + 1 - X}{Y + 1} \right].$$

Hinweis: Sollte es notwendig sein $\mathbb{E}[X]$ zu bestimmen, ist eine explizite Rechnung gefordert, da dies in der Vorlesung nicht berechnet wurde.

Aufgabe H3 *Rechnen mit Verteilungen.*

- a) Seien X_1, X_2 unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter p . Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$.
- b) Sei X binomial verteilt mit Parameter n und p . Berechnen Sie $\mathbb{E}[X(X-1)]$.

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): Mittwoch, 24. November, 13:00 Uhr

Viel Erfolg! :)