

Hausaufgaben Lösungshinweise 0

Die P-Aufgaben besprechen wir in den Präsenzübungen der ersten Vorlesungswoche (vom 11. bis 15. Oktober). Die H-Aufgaben sind bis zum

Mittwoch, 20. Oktober, 13:00 Uhr

(in den entsprechenden orangenen Kästen auf D1 mit Nummer $\in \{113, \dots, 118\}$) einzuwerfen.

Aufgabe P1 *Summen & Produkte.*

Wir betrachten folgende Ausdrücke:

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{j=2}^5 j & b) \sum_{j=3}^3 j & c) \sum_{l=-2}^1 l & d) \sum_{m=-3}^3 1 \\ e) \sum_{j=0}^2 k \cdot j, \quad k \in \mathbb{R} & f) \sum_{s=-7}^5 x, \quad x \in \mathbb{R} & g) \sum_{\alpha=2}^3 \alpha^3 & h) \sum_{i=-10}^{10} \sin\left(\frac{i \cdot \pi}{4}\right) \\ i) \sum_{k=2}^3 \sum_{m=1}^k m \cdot k & j) \sum_{n=3}^4 \sum_{k=2}^n \sum_{m=1}^k (m \cdot k + n) & k) \prod_{\kappa=7}^9 \kappa & l) \prod_{r=-3}^{-1} \sum_{s=r}^{r+1} (r - s) \\ m) \sum_{r=-3}^{-1} \prod_{s=r}^{r+1} (r - s) & & & \end{array}$$

Aufgabe P2 Aussagenlogik & Mengentheorie.

Wir wollen uns zunächst überlegen, wie eine Mengengleichheit mit Inklusionen bewiesen werden kann. Seien A und B zwei Mengen. Wie kann

a) $A \subseteq B$,

b) $A = B$

gezeigt werden?

Folgende Tabelle ist in sinnvoller Art und Weise zu vervollständigen. (Manchmal sind mehrere Antworten möglich.) Dabei sind $A, B \subseteq \Omega$ Teilmengen von Ω und φ eine für alle $\omega \in \Omega$ entscheidbare Aussage:

| Aussagenlogisches Pendant | Mengentheoretisches Pendant |
|--|---|
| \vee „oder“ | \bigcap „Schnitt“ |
| $\neg(\omega \in A) \wedge (\omega \in B)$ | c „Komplement“ |
| $\exists \omega \in A : \varphi(\omega)$ | $\{\omega \in \Omega : \varphi(\omega)\} \supseteq A$ |
| | $A \subseteq B$ |

Sei nun I eine beliebige Indexmenge (z.B. $I = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{N}_0$, $I = [0, \infty)$, etc.) und für jedes $i \in I$ sei $A_i \subseteq \Omega$ eine Teilmenge. Zu zeigen ist nun

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

unter Verwendung der eingangs in der Aufgabe beschriebenen Vorgehensweise.

Aufgabe P3 *Charakterisierungen von Mengeninklusionen.*

Es seien wieder A und B Mengen. Wir zeigen, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind: (Dies liefert somit äquivalente Charakterisierungen zu der Aussage, dass eine Menge B eine Teilmenge einer Menge A ist.)

1. $B \subseteq A$,
2. $B \cup A = A$,
3. $B \cap A = B$,
4. $B \setminus A = \emptyset$.

Hinweis: Hier kann ein sogenannter Ringschluss gezogen werden, d.h. wir zeigen $a) \implies b)$, $b) \implies c)$, $c) \implies d)$ und $d) \implies a)$. Warum ist das für den Gesamtbeweis hinreichend?

Aufgabe H1 Mengen.

1. Geben Sie die durch definierende Eigenschaften gegebene Menge $\{x \in \mathbb{N} : 10 < 2^x < 200\}$ durch Aufzählung ihrer Elemente an.
2. Beschreiben Sie die Menge $\{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$ durch definierende Eigenschaften.
3. Bestimmen Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, \{3, 5\}\})$ von $\{1, \{3, 5\}\}$.
4. Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge $\mathcal{P}(\{x \in \mathbb{N} : 30 \bmod x = 0\})$.

Lösung:

1. $\{4, 5, 6, 7\}$ (1P)
2. $\{x \in \mathbb{N} : (x \leq 30) \wedge (x \bmod 4 = 3)\}$ (1P)
3. $\{\{\}, \{1, \{3, 5\}\}, \{1\}, \{\{3, 5\}\}\}$ (1P)
4. Es gilt $\{x \in \mathbb{N} : 30 \bmod x = 0\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Damit gilt $|\{x \in \mathbb{N} : 30 \bmod x = 0\}| = 8$, also $|\mathcal{P}(\{x \in \mathbb{N} : 30 \bmod x = 0\})| = 2^8 = 256$. (1P)

□

In der Stochastik wird für spezielle Mengen, nämlich Urbilder von Mengen unter einer Abbildung, oft eine Kurzschreibweise verwendet, auf die wir hier etwas genauer eingehen wollen. Es seien Ω und M Mengen und $f : \Omega \rightarrow M$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge $U \subset M$ führen wir folgende spezielle Schreibweise ein:

$$\{f \in U\} := f^{-1}(U)$$

Dabei ist $f^{-1}(U)$ das Urbild von U unter der Abbildung f . Die Definition

$$f^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in U\}$$

ist aus der Analysis bekannt.

Achtung: Oft wird die Schreibweise $f \in U$ angepasst, je nachdem welche definierenden Eigenschaften U hat. Beispiel: $M = \mathbb{N}$ und $U = \{1, \dots, 5\}$. Dann kann man auch schreiben: $\{f \in U\} = \{f \leq 5\}$.

Außerdem wird die Bildung eines Mengenschnitts von zwei Urbildern auch oft mittels der stochastischen Urbildnotation abgekürzt. Seien $U, V \subseteq M$ Teilmengen. Wir führen folgende Notation ein:

$$\{f \in U, f \in V\} := f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Aufgabe H2 Stochastische Urbildnotation.

1. Zeigen Sie mithilfe der Definitionen, dass

$$\{f \in U \cap V\} = \{f \in U, f \in V\} = \{f \in U\} \cap \{f \in V\}$$

und

$$\{f \in U \cup V\} = \{f \in U\} \cup \{f \in V\}.$$

Hinweis: Sie können entsprechende bekannte Aussagen über Urbilder aus der Analysis verwenden oder es ausführlich mithilfe der Definition des Urbildes aus der Analysis zeigen.

2. Es seien $\Omega = \{1, \dots, 10\}$ und $M = \mathbb{N}$ sowie $f : \Omega \rightarrow M, x \mapsto x^2$. Bestimmen Sie die Menge $\{f \bmod 6 = 4\}$ explizit. Finden Sie für die Menge $\{4, 5, 6\}$ eine Darstellung in Kurzschreibweise bezüglich f , in der höchstens zwei Zahlen vorkommen.
3. Die Kurzschreibweise wird in der Stochastik vor allem deshalb verwendet, weil Ω in vielen Fällen als unbekannt gelten soll. Es sei nun Ω eine beliebige Menge (also unbekannt), $M = \mathbb{R}$ und $X : \Omega \rightarrow M$ eine Abbildung. Zeigen Sie, ohne Benutzung der Darstellung von Urbildern aus der Analysis, dass

$$\{1 - X > \max(a, b, c)\} = \{X < \min(1 - a, 1 - b, 1 - c)\}$$

und

$$\{\log(|X - 1|) \leq 2\} = \{1 - e^2 \leq X \leq e^2 + 1\}.$$

Lösung:

1. Nach der obigen Definition gilt $\{f \in U \cap V\} = f^{-1}(U \cap V)$. Aus der Analysis ist bekannt, dass (0,5P)

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

(Es ist natürlich auch in Ordnung obige Identität aus der Analysis nochmal nachzurechnen, siehe unten.) Weiter gilt aber auch, dass nach Definition $\{f \in U\} = f^{-1}(U)$ und $\{f \in V\} = f^{-1}(V)$. Also folgt insgesamt (0,5P)

$$\begin{aligned} \{f \in U \cap V\} &= f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \{f \in U, f \in V\} \\ &= f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \{f \in U\} \cap \{f \in V\} \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung nehmen wir folgende bekannte Gleichheit aus der Analysis her (0,5P):

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

(Auch hier darf man es gerne selbst nachrechnen, siehe unten.) Damit folgt (0,5P)

$$\{f \in U \cup V\} = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = \{f \in U\} \cup \{f \in V\}.$$

Der Ausführlichkeit halber zeigen wir hier in der Lösung die beiden verwendeten Gleichungen per Hand: Sei $x \in f^{-1}(U \cap V) = \{y \in \Omega : f(y) \in U \cap V\}$. Also gilt $f(x) \in U \cap V$. Es gilt also $f(x) \in U$ und $f(x) \in V$. Also gilt $x \in f^{-1}(U) = \{x \in \Omega :$

$f(x) \in U\}$ und auf gleiche Weise gilt $x \in f^{-1}(V)$. Also gilt $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Dies zeigt $f^{-1}(U \cap V) \subseteq f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Ab hier halten wir die Rechnungen etwas knapper.

Sei umgekehrt $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Dann gilt $f(x) \in U$ und $f(x) \in V$, also $f(x) \in U \cap V$, also $x \in f^{-1}(U \cap V)$.

Insgesamt folgt also $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

Für die verbliebene Gleichheit sei zunächst $x \in f^{-1}(U \cup V)$. Es gilt also $f(x) \in U \cup V$. Also ist $f(x) \in U$ oder $f(x) \in V$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehme an, dass $f(x) \in U$. Also ist auch $x \in f^{-1}(U)$ und damit $x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Sei nun andersherum $x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Wieder können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x \in f^{-1}(U)$, also $f(x) \in U$. Also auch $f(x) \in U \cup V$ und damit $x \in f^{-1}(U \cup V)$.

2. Es gilt (1P)

$$\begin{aligned} \{f \bmod 6 = 4\} &= \{f \in \{x \in \mathbb{N} : x \bmod 6 = 4\}\} = f^{-1}(\{x \in \mathbb{N} : x \bmod 6 = 4\}) \\ &= \{\omega \in \Omega : f(\omega) \bmod 6 = 4\} = \{2, 4, 8, 10\} \end{aligned}$$

und (1P)

$$\{4, 5, 6\} = f^{-1}(\{16, 25, 36\}) = \{16 \leq f \leq 36\}.$$

Eine etwas schwierigere Variante des letzten Aufgabenteils wäre die Menge $\{4, 6, 7\}$ gewesen. Diese Menge lässt sich durch $\{4, 6, 7\} = \{f \bmod 19 \geq 11\}$ darstellen.

3. Es gilt (1P)

$$\begin{aligned} \{1 - X > \max(a, b, c)\} &= \{1 - X > a, 1 - X > b, 1 - X > c\} \\ &= \{X < 1 - a, X < 1 - b, X < 1 - c\} = \{X < \min(1 - a, 1 - c, 1 - b)\}. \end{aligned}$$

Weiter gilt (1P)

$$\begin{aligned} \{\log(|X - 1|) \leq 2\} &= \{|X - 1| \leq e^2\} \\ &= \{X - 1 \leq e^2, X \geq 1\} \cup \{1 - X \leq e^2, X < 1\} = \{1 \leq X \leq e^2 + 1\} \cup \{1 - e^2 \leq X < 1\} \\ &= \{1 - e^2 \leq X \leq e^2 + 1\} \end{aligned}$$

□