

## Übungsblatt 7

### Aufgabe P1 *Dichtetransformation.*

Sei  $X$  die Gleichverteilung auf dem Intervall  $(0, 1)$ .

- a) Bestimmen Sie die Verteilung von  $Y := X^2 + 1$ .
- b) Bestimmen Sie den Erwartungswert  $\mathbb{E}[Y]$ .

### Aufgabe P2 *Dichtefunktion.*

Betrachten Sie folgende Funktion:

$$f_X(t) = \begin{cases} t^2, & \text{wenn } -1 \leq t < 0, \\ \frac{4}{3} \cdot t, & \text{wenn } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Dichtefunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen  $X$  ist.

- a) Zeigen Sie, dass  $f$  die Dichtefunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen  $X$  ist.
- b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion  $F_X$
- c) Berechnen Sie  $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$ .
- d) Bestimmen Sie  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}(X)$ .

### Aufgabe H1 Verteilungsfunktion.

- a) Welche der folgenden Funktionen sind Verteilungsfunktionen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$F_1(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2 \sin x & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x \end{cases} \quad F_2(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin(2x) & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x \end{cases}$$

$$F_3(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x \end{cases}$$

- b) Geben Sie alle Bedingungen an die Konstanten  $a, b, c$  an, damit die Funktion  $F_4$  eine Verteilungsfunktion ist.

$$F_4(x) := \begin{cases} 0 & x < \pi/4 \\ a & x = \pi/4 \\ bx + c & \pi/4 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < x \end{cases}$$

- c) Angenommen, es werde ein Punkt  $X$  der reellen Achse auf zufällige Weise so ausgewählt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Punkt im Intervall  $(a, b]$  liegt, gerade durch  $F(b) - F(a)$  beschrieben wird, wobei  $F$  eine gegebene Verteilungsfunktion ist. Geben Sie für beliebige Werte von  $u < v \in \mathbb{R}$  Formeln für die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Punkt  $X$

- im Intervall  $(u, \infty)$  liegt
- im Intervall  $[u, v]$  liegt
- exakt gleich  $u$  ist.

- d) Prüfen Sie für alle  $i = 1, 2, 3, 4$  für die  $F_i$  eine Verteilungsfunktion ist, nach, ob  $F_i$  eine Dichte haben kann. Wenn ja, dann geben Sie diese an.

---

**Lösung:** Insgesamt fünf Punkte.

erstellt von Meier-Hans (am 03.05.2016). Zusammengesetzt aus Aufgabensammlung, d) erstellt von Alexander Klump 11.2021

(a)

$F_1(x)$  ist **keine** Verteilungsfunktion, denn  $F_1(x)$  ist nicht monoton steigend, da  $\exists x$  mit  $0 \leq x < \pi/2 : F_1(x) > 1$ .  $\Rightarrow F_1(x)$  ist **keine** Verteilungsfunktion. (0.5P)

$F_2(x)$  ist keine Verteilungsfunktion, denn  $F_2(x)$  ist nicht monoton steigend, da  $\sin(2x)$  nicht monoton steigend ist für  $0 \leq x < \pi/2$ .  $\Rightarrow F_2(x)$  ist keine Verteilungsfunktion. (0.5P)

$F_3(x)$  ist Verteilungsfunktion, denn:

(F1)  $F_3(x)$  monoton nichtfallend, da  $\frac{1}{2} \sin x$  monoton nichtfallend und  $\leq 1$  für  $0 \leq x < \pi/2$ .

(F2)  $F_3(x)$  rechtsseitig stetig, da  $\frac{1}{2} \sin x$  rechtsseitig stetig für  $0 \leq x < \pi/2$ .

(F3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} F_3(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$

$\Rightarrow F_3(x)$  ist Verteilungsfunktion. (1P)

b)

Nach Definition der Funktion ist das Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$  für alle Konstanten  $a, b, c$  erfüllt.

Es ist leicht einzusehen, dass  $0 \leq a \leq 1$  gelten muss damit  $F_4$  monoton wächst. (0.5P)

Damit  $F_4$  rechtsstetig ist, benötigen wir dass  $F_4(\pi/2) = 1$  und  $\lim_{x \searrow \pi/4} F(x) = a$ . Somit erhalten wir die Bedingungen  $b \cdot \pi/4 + c = a$  und  $b \cdot \pi/2 + c = 1$ . Durch einsetzen und Umformung dieser Bedingungen erhalten wir als Bedingung an die Parameter:

$$0 \leq a \leq 1, \quad b = \frac{1-a}{\pi/4}, \quad c = 2a - 1.$$

(0.5P)

c)

Es gelten

$$\mathbb{P}(X \in (u, \infty)) = \mathbb{P}(X \in \lim_{k \rightarrow \infty} (u, k]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \in (u, k]) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(k) - F(u) = 1 - F(u).$$

$$\mathbb{P}(X \in [u, v]) = \mathbb{P}(X \in \lim_{k \searrow 0} (u-k, v]) = \lim_{k \searrow 0} \mathbb{P}(X \in (u-k, v]) = \lim_{k \searrow 0} F(v) - F(u-k) = F(v) - F(u-).$$

$$\mathbb{P}(X = u) = \mathbb{P}(X \in [u, u]) = F(u) - F(u-).$$

(1P)

d) zunächst  $i = 3$ :

Variante I: Wenn  $F_3$  eine Dichte  $f_3$  hätte, dann würde gelten

$$F_3(x) = F_3(x) = \int_{-\infty}^x f_3(t) dt \quad (1)$$

wobei  $x \in \mathbb{R}$ . Durch ableiten in  $x$  ergäbe sich also  $f_3(x) = 0$  für  $x < 0$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$  für  $x \in (0, \pi/2)$  und  $f_3(x) = 0$  für  $x > \pi/2$ . Aber damit würde gelten

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} F_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos(t) dt = \frac{1}{2} \sin(\pi/2) = \frac{1}{2},$$

was ein Widerspruch ist. Also kann  $F_3$  keine Dichte haben.

Variante II: Aus der Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Verteilungsfunktion/Zufallsvariable (vgl. (1)) folgt direkt, dass die Verteilungsfunktion dann stetig ist.  $F_3$  ist nicht stetig in  $x = \pi/2$  also kann  $F_3$  keine Dichte haben.

(0.5P)

Nun  $i = 4$ :

Wie oben können wir zunächst versuchen zu sehen für welche Parameter  $F_4$  stetig ist. Dies kann nur der Fall sein, wenn  $a = 0$ . Die Bedingungen an die anderen Parameter sind dann  $b = (\pi/4)^{-1}$  und  $c = -1$ . Leitet man  $F_4$  dann ab erhält man als Dichte

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi/4} & : x \in \pi/4 < x < \pi/2 \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

(0.5P)

---

## Aufgabe H2 Exponentialverteilung.

- a) Sei  $X$  exponentiell verteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ . Berechnen Sie die Dichtefunktion von  $e^X$ .
- b) Sei nun zusätzlich  $\lambda = 2$ . Berechnen Sie  $\mathbb{E}[e^X]$ .

**Lösung:** a) Da  $X \in (0, \infty)$  gilt  $e^X \in (1, \infty)$  (0.5 P.). Es ist für  $1 < t$ :

$$F_{e^X}(t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \ln(t)) = 1 - e^{-\lambda \ln(t)} = 1 - t^{-\lambda}. \quad (1 \text{ P.})$$

Damit ist für  $t > 1$ :

$$f_{e^X}(t) = F'_{e^X}(t) = \lambda t^{-(\lambda+1)}. \quad (0.5 \text{ P.})$$

Somit folgt insgesamt:

$$f_{e^X}(t) = \begin{cases} \lambda t^{-(\lambda+1)}, & \text{für } t > 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1 \text{ P.})$$

b) Variante 1:  $\mathbb{E}[e^X] = 2 \int_0^\infty e^t e^{-2t} dt = 2 [-e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} = 2 \cdot (0 - (-1)) = 2.$

Variante 2:

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_0^\infty t \cdot f_{e^X}(t) dt = \int_1^\infty t \cdot 2t^{-3} dt = 2 \int_1^\infty t^{-2} dt = 2 [-1/t]_{t=1}^{t=\infty} = 2 \cdot (0 - (-1)) = 2.$$

### Aufgabe H3 Stetige Dichten.

- a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + cx & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + kx & \text{für } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Überprüfen Sie ob Konstanten  $c, k \in \mathbb{R}$  existieren, sodass  $f$  und  $g$  Dichtefunktionen von stetigen Zufallsvariablen sind.

- b) Sofern sie existieren, geben Sie die entsprechenden Verteilungsfunktionen an und berechnen Sie  $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$ .
- c) Es sei  $X$  nun eine stetige Zufallsvariable mit Dichte  $f$ . Berechnen Sie die Dichte von  $Y := \log(1 + X)$  und den Erwartungswert  $\mathbb{E}[Ye^{-Y}1_{\{Y \leq 1\}}]$ .

**Lösung:** Insgesamt fünf Punkte

erstellt von Meier-Hans 13.11.2014 nach Brune, erweitert von A. Klump 11.2021

Für  $f$  muss gelten

$$1 = \int_0^2 \frac{1}{4} + cx dx = \frac{1}{2} + 2c.$$

Also  $c = \frac{1}{4}$ . (0,5P) Hier gilt auch  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall existiert die Verteilungsfunktion  $F(x)$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

(1P)

Es gilt  $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ . (0,5P)

Für  $g$  müsste gelten

$$1 = \int_0^4 1 + kx dx = 4 + 8k.$$

Also müsste  $k = -\frac{3}{8}$  gelten. (0,5P) Aber  $g(x) = 1 - \frac{3}{8}x < 0$  für  $4 > x > \frac{8}{3}$ . Also ist  $g$  niemals eine Dichtefunktion. Entsprechend kann weder die Verteilungsfunktion gebildet, noch die Wahrscheinlichkeit berechnet werden. (0,5P)

c)  $X$  nimmt nur Werte im Intervall  $(0, 2)$  mit positiver Wahrscheinlichkeit an. Sei  $\varphi : (0, 2) \rightarrow (0, \log(3))$ ,  $\varphi(x) = \log(1+x)$ . Dann gilt  $Y = \varphi(X)$ . Mit dem Satz für transformierte Zufallsvariablen aus der Vorlesung erhalten wir direkt ( $\varphi'(x) = 1/(1+x)$ ,  $\varphi^{-1}(y) = e^y - 1$ ) für  $y \in (0, \log(3))$ :

$$f_Y(y) = \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} = \frac{f(e^y - 1)}{|1/(1 + (e^y - 1))|} = \frac{1}{4}e^{2y}.$$

(1P)

Nun gilt mittels partieller Integration

$$\mathbb{E}[Ye^{-Y}1_{\{Y \leq 1\}}] = \int_0^1 ye^{-y} \frac{1}{4}e^{2y} dy = \int_0^1 y \frac{1}{4}e^y dy = \left[ \frac{1}{4}ye^y \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 e^y dy = \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}(e - 1) = \frac{1}{4}.$$

(1P)

---

*Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): Mittwoch, 8. Dezember, 13:00 Uhr*

Viel Erfolg! :)