

Übungsblatt 6

Aufgabe P1 *Einfache symmetrische Irrfahrt.*

Ein Frosch springt auf der Zahlengeraden. Er beginnt in 0. Jeder Sprung erfolgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit um 1 nach rechts oder um 1 nach links. Die Sprünge erfolgen unabhängig voneinander.

- Beschreiben Sie in einfachen Worten, was das Gesetz der großen Zahl in dieser Situation voraussagt.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Frosch nach 10000 Sprüngen mehr als 500 von seinem Ausgangsort entfernt? Beantworten Sie diese Frage mit der Chernoff Abschätzung. (Hinweis: Versuchen Sie die ZV, die einen Sprung codiert durch Anwenden einer Funktion als bernoulli verteilte ZV darzustellen)

Aufgabe P2 *Poisson-Approximation.*

Bei einem Sportereignis sehen 1825 Personen zu. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Personen am Tag des Ereignisses Geburtstag haben

- exakt mit der Binomialverteilung
- approximativ mit der Poissonverteilung.

Nehmen Sie an, dass an allen Tagen gleich viele Menschen geboren werden und vernachlässigen Sie Schaltjahre.

Aufgabe P3 *Erwartungswert mit Bruch.*

Es seien X_1 und X_2 unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. X_1 sei gleichverteilt auf der Menge $\{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E} \left[\frac{X_1}{X_1 + X_2} \right] = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe H1 *Poisson-Approximation.*

Bei einer Knochenmarktransplantation ist es wichtig, dass das Gewebe des Spenders mit dem des Patienten verträglich ist. Dies ist im Durchschnitt unter 1 Million Spendern lediglich ein Mal der Fall. Wie groß müsste die Spender-Datenbank sein, damit für einen Patienten mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% ein geeigneter Spender gefunden wird? Treffen Sie geeignete Annahmen und

- a) bestimmen Sie den Wert exakt,
- b) bestimmen Sie den Wert approximativ durch die Poisson-Approximation.

Wir gehen dabei davon aus, dass die Personen in der Datenbank unabhängig voneinander ausgewählt worden sind und jede Person die gleiche Wahrscheinlichkeit hat ein passender Spender zu sein.

Lösung: Insgesamt fünf Punkte.

a) Wir bezeichnen mit X_i die Verträglichkeit des i -ten Spenders in der Datenbank. X_i ist gleich 1, wenn das Gewebe mit den Patienten verträglich ist, sonst sei $X_i = 0$. Die X_i sind unabhängig. Ferner gehen wir davon aus, dass bei jedem Versuch die gleiche Trefferwahrscheinlichkeit $p := \frac{1}{1000000}$ gilt. Unter obigen Voraussetzungen können wir die Anzahl der verträglichen Spender $Y_n := X_1 + \dots + X_n$ in einer Datenbank mit n Personen als binomial verteilt mit Parameter n und p annehmen. (1 Punkt) Dann kann man die gesuchte Zahl n der Anzahl Spender in der Datenbank aus folgender Ungleichung bestimmen:

$$P(Y_n \geq 1) \leq 0.9$$

(1 Punkt)

Da

$$P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = 1 - (1-p)^n$$

(0,5 Punkte) und

$$1 - (1-p)^n \geq 0.9 \Leftrightarrow 0.1 \geq (1-p)^n \Leftrightarrow \ln(0.1) \leq n \ln(1-p) \Leftrightarrow \frac{\ln(0.1)}{\ln(1-p)} \leq n \Leftrightarrow n \geq 2302583.9$$

Also braucht man mindestens 2302584 Personen in der Datenbank. (0,5 Punkte)

b) Da n groß und p klein ist, kann man alternativ auch eine Poisson-Approximation verwenden, um λ und hieraus n zu bestimmen: Y_n ist annähernd poisson verteilt mit $\lambda = np$. (1 Punkt) Es folgt

$$P(Y_n \geq 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-\lambda}$$

(0,5 Punkte) und

$$1 - e^{-\lambda} \geq 0.9 \Leftrightarrow 0.1 \geq e^{-\lambda} \Leftrightarrow \ln(0.1) \leq -\lambda \Leftrightarrow \lambda \geq 2.3026.$$

(0,5 Punkte) Es folgt $np \geq 2.3026$, d.h. $n \geq 2302600$. (Dies entspricht in etwa dem Ergebnis der exakten Rechnung.)

Aufgabe H2 *n-maliger Münzwurf.*

Eine faire Münze wird n mal geworfen. Sei $f(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Würfeln mindestens 60% aller Treffer Kopf zeigen.

- a) Zeigen Sie, dass $f(5) > f(100)$. (Hinweis: Benutzen Sie eine Abschätzung. Rechnen Sie nicht $f(100)$ per Hand aus.)
- b) Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$.

Lösung: a) Sei Y_n die Anzahl Kopftreffer bei n Würfeln. Y_n ist binomial verteilt mit Parameter n und $\frac{1}{2}$. Wir berechnen $f(5)$ konkret aus:

$$f(5) = \mathbb{P}(Y_5 \geq 0.5 \cdot 6) = \sum_{k=3}^5 \mathbb{P}(Y_5 = k) = \sum_{k=3}^5 \binom{5}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-k} = 0.5$$

Alternativ hätte man auch aus Symmetriegründen wie folgt argumentieren können: 3, 4, 5 Kopf ist genauso wahrscheinlich, wie 3, 4, 5 mal Zahl. Da aber 3, 4, 5 mal Zahl dem Ereignis 0, 1, 2 Kopf entspricht und die Summe der Zähldichte 1 ist, muss $f(5) = 0.5$ sein.

Da nach Chebychev gilt:

$$f(100) = \mathbb{P}(Y_{100} > 60) = \mathbb{P}(Y_{100} - 50 > 10) \leq \mathbb{P}(|Y_{100} - 50| > 10) \leq \frac{\text{Var } Y_{100}}{10^2} = \frac{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{100} = 0.25$$

ist

$$f(5) = 0.5 > 0.25 \geq f(100).$$

b) Sei $X_k = 1$, wenn im k ten Wurf Kopf gefallen ist, sonst sei $X_k = 0$. Wir haben $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ (Beachte, dass $\mathbb{E}[X_k] = 0.5$ und $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{n}{2}$ ist). Mit dem schwachen Gesetz der große Zahl folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$f(n) = \mathbb{P}(Y_{100} \geq n \cdot 0.6) = \mathbb{P}(Y_{100} - 0.5 \geq 0.1) \leq \mathbb{P}(|Y_{100} - 0.5| \geq 0.1) \rightarrow 0.$$

Alternativ kann man auch die Chernoff-Ungleichung benutzen:

$$f(n) = \mathbb{P}(Y_{100} \geq n \cdot (0.5 + 0.1)) = e^{-n \frac{0.1^2}{3}} = (e^{-\frac{1}{300}})^n \rightarrow 0$$

da $|e^{-\frac{1}{300}}| < 1$.

Aufgabe H3 Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten.

Erfahrungsgemäß fliegt jeder Passagier, der einen Flug gebucht hat, nur mit Wahrscheinlichkeit 90% auch wirklich mit. Für den Flug eines Airbus mit 549 Sitzen wurden daher 580 Tickets verkauft. Es kann also passieren, dass der Flug überbucht ist, d.h. dass mehr Passagiere auftauchen als Plätze da sind. Gehen Sie davon aus, dass sich die Personen unabhängig dafür entscheiden zufliegen und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür ...

- a) mit der Markov-Ungleichung ab.
- b) mit der Chebyshev-Ungleichung ab.
- c) mit der Chernoff-Ungleichung ab (Arbeitsversion).

Lösung: Insgesamt fünf Punkte.

Sei X die Zufallsvariable, die angibt wie viele Personen den Flug antreten wollen. Da man 580 Tickets verkauft hat und für jede Person es eine Wahrscheinlichkeit von 0.9 gibt, dass diese den Flug antritt,

ist X binomial verteilt. Nach Vorlesung ist $\mathbb{E}[X] = 580 \cdot 0.9 = 522$ und $\text{Var}(X) = 580 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 52.2$. Das Ereignis, dass mehr als 549 Personen auftauchen ist $\{X > 549\}$ bzw. $\{X \geq 550\}$. (1 Punkt)

a) Da X eine nicht negative Zufallsvariable ist, können wir die Markov Ungleichung anwenden und erhalten

$$\mathbb{P}(X \geq 550) \stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(X)}{550} = \frac{522}{550} = \frac{261}{275} \approx 0.95$$

(1 Punkt) b) Mit der Chebyshev-Ungleichung erhalten wir

$$\mathbb{P}(X \geq 550) = P(X - 522 \geq 28) \leq \mathbb{P}(|X - 522| \geq 28) \stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{\text{Var}(X)}{28^2} = \frac{52.2}{28^2} \approx 0.067$$

(1,5 Punkte)

c) Mit der Chernoff-Ungleichung erhalten wir:

$$\mathbb{P}(X \geq 550) = \mathbb{P}(X \geq (1 + \frac{14}{261})522) \stackrel{\text{Chernoff}}{\leq} e^{-522 \cdot \frac{(\frac{14}{261})^2}{3}} \approx e^{-0.500639} \approx 0.606143$$

(1,5 Punkte) In diesem Fall liefert die Chebyshev-Ungleichung eine deutlich bessere Abschätzung. (Normalerweise ist es die Chernoff-Ungleichung, aber da wir relativ wenige Personen haben und keine großen Abweichungen betrachten, kann auch mal die Chebyshev Ungleichung besser sein). Man beachte, dass die Chebyshev-Ungleichung immer noch sehr grob ist, da der wirkliche Wert ungefähr ≈ 0.000018 ist.

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): **Mittwoch, 1. Dezember, 13:00 Uhr**

Viel Erfolg! :)