

Übungsblatt 6

Aufgabe P1 *Einfache symmetrische Irrfahrt.*

Ein Frosch springt auf der Zahlengeraden. Er beginnt in 0. Jeder Sprung erfolgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit um 1 nach rechts oder um 1 nach links. Die Sprünge erfolgen unabhängig voneinander.

- Beschreiben Sie in einfachen Worten, was das Gesetz der großen Zahl in dieser Situation voraussagt.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Frosch nach 10000 Sprüngen mehr als 500 von seinem Ausgangsort entfernt? Beantworten Sie diese Frage mit der Chernoff Abschätzung. (Hinweis: Versuchen Sie die ZV, die einen Sprung codiert durch Anwenden einer Funktion als bernoulli verteilte ZV darzustellen)

Aufgabe P2 *Poisson-Approximation.*

Bei einem Sportereignis sehen 1825 Personen zu. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Personen am Tag des Ereignisses Geburtstag haben

- exakt mit der Binomialverteilung
- approximativ mit der Poissonverteilung.

Nehmen Sie an, dass an allen Tagen gleich viele Menschen geboren werden und vernachlässigen Sie Schaltjahre.

Aufgabe P3 *Erwartungswert mit Bruch.*

Es seien X_1 und X_2 unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. X_1 sei gleichverteilt auf der Menge $\{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E} \left[\frac{X_1}{X_1 + X_2} \right] = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe H1 *Poisson-Approximation.*

Bei einer Knochenmarktransplantation ist es wichtig, dass das Gewebe des Spenders mit dem des Patienten verträglich ist. Dies ist im Durchschnitt unter 1 Million Spendern lediglich ein Mal der Fall. Wie groß müsste die Spender-Datenbank sein, damit für einen Patienten mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% ein geeigneter Spender gefunden wird? Treffen Sie geeignete Annahmen und

- a) bestimmen Sie den Wert exakt,
- b) bestimmen Sie den Wert approximativ durch die Poisson-Approximation.

Wir gehen dabei davon aus, dass die Personen in der Datenbank unabhängig voneinander ausgewählt worden sind und jede Person die gleiche Wahrscheinlichkeit hat ein passender Spender zu sein.

Aufgabe H2 *n -maliger Münzwurf.*

Eine faire Münze wird n mal geworfen. Sei $f(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Würfen mindestens 60% aller Treffer Kopf zeigen.

- a) Zeigen Sie, dass $f(5) > f(100)$. (Hinweis: Benutzen Sie eine Abschätzung. Rechnen Sie nicht $f(100)$ per Hand aus.)
- b) Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$.

Aufgabe H3 *Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten.*

Erfahrungsgemäß fliegt jeder Passagier, der einen Flug gebucht hat, nur mit Wahrscheinlichkeit 90% auch wirklich mit. Für den Flug eines Airbus mit 549 Sitzen wurden daher 580 Tickets verkauft. Es kann also passieren, dass der Flug überbucht ist, d.h. dass mehr Passagiere auftauchen als Plätze da sind. Gehen Sie davon aus, dass sich die Personen unabhängig dafür entscheiden zufliegen und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür ...

- a) mit der Markov-Ungleichung ab.
- b) mit der Chebyshev-Ungleichung ab.
- c) mit der Chernoff-Ungleichung ab (Arbeitsversion).

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): **Mittwoch, 1. Dezember, 13:00 Uhr**

Viel Erfolg! :)