

Übungsblatt 0

Die P-Aufgaben besprechen wir in den Präsenzübungen der ersten Vorlesungswoche (vom 11. bis 15. Oktober). Die H-Aufgaben sind bis zum

Mittwoch, 20. Oktober, 13:00 Uhr

(in den entsprechenden orangenen Kästen auf D1 mit Nummer $\in \{113, \dots, 118\}$) einzuwerfen.

Aufgabe P1 *Summen & Produkte.*

Wir betrachten folgende Ausdrücke:

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{j=2}^5 j & b) \sum_{j=3}^3 j & c) \sum_{l=-2}^1 l & d) \sum_{m=-3}^3 1 \\ e) \sum_{j=0}^2 k \cdot j, \, k \in \mathbb{R} & f) \sum_{s=-7}^5 x, \, x \in \mathbb{R} & g) \sum_{\alpha=2}^3 \alpha^3 & h) \sum_{i=-10}^{10} \sin\left(\frac{i \cdot \pi}{4}\right) \\ i) \sum_{k=2}^3 \sum_{m=1}^k m \cdot k & j) \sum_{n=3}^4 \sum_{k=2}^n \sum_{m=1}^k (m \cdot k + n) & k) \prod_{\kappa=7}^9 \kappa & l) \prod_{r=-3}^{-1} \sum_{s=r}^{r+1} (r - s) \\ m) \sum_{r=-3}^{-1} \prod_{s=r}^{r+1} (r - s) & & & \end{array}$$

Aufgabe P2 Aussagenlogik & Mengentheorie.

Wir wollen uns zunächst überlegen, wie eine Mengengleichheit mit Inklusionen bewiesen werden kann. Seien A und B zwei Mengen. Wie kann

a) $A \subseteq B$,

b) $A = B$

gezeigt werden?

Folgende Tabelle ist in sinnvoller Art und Weise zu vervollständigen. (Manchmal sind mehrere Antworten möglich.) Dabei sind $A, B \subseteq \Omega$ Teilmengen von Ω und φ eine für alle $\omega \in \Omega$ entscheidbare Aussage:

Aussagenlogisches Pendant	Mengentheoretisches Pendant
\vee „oder“	\bigcap „Schnitt“
$\neg(\omega \in A) \wedge (\omega \in B)$	c „Komplement“
$\exists \omega \in A : \varphi(\omega)$	$\{\omega \in \Omega : \varphi(\omega)\} \supseteq A$
	$A \subseteq B$

Sei nun I eine beliebige Indexmenge (z.B. $I = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{N}_0$, $I = [0, \infty)$, etc.) und für jedes $i \in I$ sei $A_i \subseteq \Omega$ eine Teilmenge. Zu zeigen ist nun

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

unter Verwendung der eingangs in der Aufgabe beschriebenen Vorgehensweise.

Aufgabe P3 *Charakterisierungen von Mengeninklusionen.*

Es seien wieder A und B Mengen. Wir zeigen, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind: (Dies liefert somit äquivalente Charakterisierungen zu der Aussage, dass eine Menge B eine Teilmenge einer Menge A ist.)

1. $B \subseteq A$,
2. $B \cup A = A$,
3. $B \cap A = B$,
4. $B \setminus A = \emptyset$.

Hinweis: Hier kann ein sogenannter Ringschluss gezogen werden, d.h. wir zeigen $a) \implies b)$, $b) \implies c)$, $c) \implies d)$ und $d) \implies a)$. Warum ist das für den Gesamtbeweis hinreichend?

Aufgabe H1 Mengen.

1. Geben Sie die durch definierende Eigenschaften gegebene Menge $\{x \in \mathbb{N} : 10 < 2^x < 200\}$ durch Aufzählung ihrer Elemente an.
2. Beschreiben Sie die Menge $\{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$ durch definierende Eigenschaften.
3. Bestimmen Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, \{3, 5\}\})$ von $\{1, \{3, 5\}\}$.
4. Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge $\mathcal{P}(\{x \in \mathbb{N} : 30 \bmod x = 0\})$.

In der Stochastik wird für spezielle Mengen, nämlich Urbilder von Mengen unter einer Abbildung, oft eine Kurzschreibweise verwendet, auf die wir hier etwas genauer eingehen wollen. Es seien Ω und M Mengen und $f : \Omega \rightarrow M$ eine Abbildung. Für eine Teilmenge $U \subset M$ führen wir folgende spezielle Schreibweise ein:

$$\{f \in U\} := f^{-1}(U)$$

Dabei ist $f^{-1}(U)$ das Urbild von U unter der Abbildung f . Die Definition

$$f^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in U\}$$

ist aus der Analysis bekannt.

Achtung: Oft wird die Schreibweise $f \in U$ angepasst, je nachdem welche definierenden Eigenschaften U hat. Beispiel: $M = \mathbb{N}$ und $U = \{1, \dots, 5\}$. Dann kann man auch schreiben: $\{f \in U\} = \{f \leq 5\}$.

Außerdem wird die Bildung eines Mengenschnitts von zwei Urbildern auch oft mittels der stochastischen Urbildnotation abgekürzt. Seien $U, V \subseteq M$ Teilmengen. Wir führen folgende Notation ein:

$$\{f \in U, f \in V\} := f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Aufgabe H2 Stochastische Urbildnotation.

1. Zeigen Sie mithilfe der Definitionen, dass

$$\{f \in U \cap V\} = \{f \in U, f \in V\} = \{f \in U\} \cap \{f \in V\}$$

und

$$\{f \in U \cup V\} = \{f \in U\} \cup \{f \in V\}.$$

Hinweis: Sie können entsprechende bekannte Aussagen über Urbilder aus der Analysis verwenden oder es ausführlich mithilfe der Definition des Urbildes aus der Analysis zeigen.

2. Es seien $\Omega = \{1, \dots, 10\}$ und $M = \mathbb{N}$ sowie $f : \Omega \rightarrow M, x \mapsto x^2$. Bestimmen Sie die Menge $\{f \bmod 6 = 4\}$ explizit. Finden Sie für die Menge $\{4, 5, 6\}$ eine Darstellung in Kurzschreibweise bezüglich f , in der höchstens zwei Zahlen vorkommen.
3. Die Kurzschreibweise wird in der Stochastik vor allem deshalb verwendet, weil Ω in vielen Fällen als unbekannt gelten soll. Es sei nun Ω eine beliebige Menge (also unbekannt), $M = \mathbb{R}$ und $X : \Omega \rightarrow M$ eine Abbildung. Zeigen Sie, ohne Benutzung der Darstellung von Urbildern aus der Analysis, dass

$$\{1 - X > \max(a, b, c)\} = \{X < \min(1 - a, 1 - b, 1 - c)\}$$

und

$$\{\log(|X - 1|) \leq 2\} = \{1 - e^2 \leq X \leq e^2 + 1\}.$$