

Übungsblatt 8

Aufgabe P1 *Zentraler Grenzwertsatz.*

- a) Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{10000} seien unabhängig und alle seien exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Wir definieren die Zufallsvariable X gemäß $X := \sum_{i=1}^{10000} X_i$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(9950 \leq X \leq 10200)$ approximativ unter Verwendung des Zentralen Grenzwertsatzes.
- b) An einer Wahl zwischen zwei Kandidaten A und B nehmen 1000000 Wähler teil. Davon kennen 2000 Wähler den Kandidaten A aus Wahlkampfveranstaltungen und stimmen geschlossen für ihn. Die übrigen 998000 Wähler sind unentschlossen und treffen ihre Entscheidung unabhängig voneinander durch Werfen einer fairen Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg des Kandidaten A ? Eine approximative Lösung reicht.

Aufgabe P2 *Unabhängige stetige Zufallsvariablen.*

Seien X und Y unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X < Y^2)$.

Aufgabe H1 Rechnen mit Dichten.

a) Sei Z eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{6}z + \frac{1}{4}z^2, & \text{für } 0 < z \leq 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}(Z > 1)$, $\mathbb{E}[Z]$ und $\text{Var}[Z]$.

b) Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 4x \cdot (1 - y), & \text{für } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichten der Randverteilungen X und Y .

c) Sind X und Y aus Teil b) unabhängig?

Lösung: Insgesamt fünf Punkte.

a) Wir haben

$$\mathbb{P}(Z > 1) = \int_1^2 f_Z(z) dt = \int_1^2 \frac{1}{6}z + \frac{1}{4}z^2 dt = \left[\frac{z^2}{12} + \frac{z^3}{12} \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad (0.5P)$$

und

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^2 z f_Z(z) dt = \int_0^2 \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{4}z^3 dt = \left[\frac{z^3}{18} + \frac{z^4}{16} \right]_0^2 = \frac{13}{19}. \quad (0.5P)$$

Da

$$\mathbb{E}[Z^2] = \int_0^2 z^2 f_Z(z) dt = \int_0^2 \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{4}z^4 dt = \left[\frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{20} \right]_0^2 = \frac{34}{15} \quad (0.5P)$$

ist

$$\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{34}{15} - \left(\frac{13}{19} \right)^2 = \frac{73}{405} \approx 0.180247.$$

b) Für $0 < x < 1$ gilt:

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{(X,Y)}(x, y) dy = 4 \int_0^1 x - xy dy = 4 \left[xy - \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^1 = 2x$$

Also ist

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(1P)

Für $0 < y < 1$ gilt:

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{(X,Y)}(x, y) dx = 4 \int_0^1 x - xy dx = 4 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2y \right]_0^1 = 2 - 2y$$

Also ist

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2 - 2y, & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(1P)

c) X und Y sind genau dann unabhängig, wenn $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (0.5P).
Offenbar gilt für alle $x, y \in (0,1)$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 4x(1-y) = 2x(2-2y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Für $x \in (0,1), y \notin (0,1)$ bzw. $x \notin (0,1), y \in (0,1)$ bzw. $x, y \notin (0,1)$ sind sowohl $f_{(X,Y)}(x,y)$ als auch $f_X(x)f_Y(y)$ Null. Also sind X und Y unabhängig (1P).

Aufgabe H2 Summen von Zufallsvariablen.

- a) Berechnen Sie die Dichte der Summe von zwei unabhängigen, jeweils auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen.
- b) Sie wählen 100 Zahlen unabhängig voneinander rein zufällig aus dem Intervall $(0,1)$ aus. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit mit Chebychev ab, dass die Summe der Zahlen größer als 55 ist.

Lösung: a) Seien X_1, X_2 unabhängig und gleichverteilt auf $(0,1)$. Gesucht ist die Dichte von $X_1 + X_2$.
Nach Vorlesung gilt:

$$f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z-v) \cdot f_{X_2}(v) dv$$

Man sieht, dass $X_1 + X_2$ nur Werte zwischen 0 und 2 annimmt. Daher ist $f_{X_1+X_2}(z) = 0$ für $z < 0$ oder $z > 2$. Ist $0 < z < 1$, so ist $f_{X_1}(z-v) = 0$ für $v > z$ und $f_{X_2}(v) = 0$ für $v < 0$. Somit gilt

$$f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z-v) \cdot f_{X_2}(v) dv = \int_0^z f_{X_1}(z-v) \cdot f_{X_2}(v) dv = \int_0^z 1 \cdot 1 dv = z. \quad (1 \text{ P.})$$

Für $1 < z < 2$ haben wir $f_{X_1}(z-v) = 0$ für $v < z-1$ und $f_{X_2}(v) = 0$ für $v > 1$. Somit gilt in diesem Fall:

$$f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z-v) \cdot f_{X_2}(v) dv = \int_{z-1}^1 f_{X_1}(z-v) \cdot f_{X_2}(v) dv = \int_{z-1}^1 1 \cdot 1 dv = 2 - z. \quad (1 \text{ P.})$$

Insgesamt ist also

$$f_{X_1+X_2}(z) = \begin{cases} z, & \text{für } 0 < z < 1 \\ 2 - z, & \text{für } 1 < z < 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1 \text{ P.})$$

b) Sei X_i die i -te gewählte Zahl. Es ist X_i gleichverteilt auf $(0,1)$ mit $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{2}$ und $\text{Var}[X_i] = \frac{1}{12}$.
 $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ist die Summe dieser Zahlen mit $\mathbb{E}[S_n] = n \cdot \frac{1}{2}$ (0.5 P.) und $\text{Var}[S_n] = n \cdot \frac{1}{12}$ (0.5 P.). Gesucht ist $\mathbb{P}(S_{100} > 55)$. Nach Chebychev gilt:

$$\mathbb{P}(S_{100} > 55) = \mathbb{P}(S_{100} - \mathbb{E}[S_{100}] > 5) \leq \mathbb{P}(|S_{100} - \mathbb{E}[S_{100}]| > 5) \leq \frac{\text{Var}[S_n]}{25} = \frac{100 \cdot \frac{1}{12}}{25} = \frac{1}{3}. \quad (2 \text{ P.})$$

Der exakte Wert ist übrigens ≈ 0.0416

Aufgabe H3 Zentraler Grenzwertsatz.

Eine Fluggesellschaft weiß, dass im Mittel 15% der Buchungen für einen bestimmten Flug mit 180 Plätzen nicht wahrgenommen werden. Daher wird der Flug überbucht, das heißt es werden mehr als 180 Buchungen angenommen. Dabei nehme man an, dass die Buchungen unabhängig voneinander wahrgenommen werden.

- Berechnen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass alle erscheinenden Personen, die den Flug gebucht haben, auch fliegen können, wenn 205 Buchungen angenommen werden.
- Berechnen Sie mit dem Zentralen Grenzwertsatz wie viele Buchungen höchstens angenommen werden dürfen, damit die Wahrscheinlichkeit aus a) mindestens 99% beträgt.
- Eine exakte Berechnung mit der Binomialverteilung ergibt für die Wahrscheinlichkeit in a) einen Wert von 0,8918. Ein Teil des Fehlers liegt an der Tatsache, dass der Zentrale Grenzwertsatz eine stetige Verteilung nutzt um eine diskrete Zufallsvariable zu approximieren. Eine Strategie zur Verbesserung der Approximation besteht darin eine sogenannte **Stetigkeitskorrektur** vorzunehmen. Hierbei werden die Grenzen des Untersuchten Intervalles um 0,5 nach außen verschoben. Man betrachtet also die Werte, die auf das gesuchte Intervall gerundet werden. Wiederholen Sie die Berechnung aus a) für eine (im Sinne der Stetigkeitskorrektur gedachte) Sitzplatzzahl von 180,5.

Hinweis: In Panda finden Sie eine Tabelle mit den Werten einer Standardnormalverteilung und ihrer Quantile. (Quantile von Φ sind Werte der Umkehrfunktion Φ^{-1} .)

Lösung: Insgesamt fünf Punkte.

erstellt von Meier-Hans 26.11.2014 übernommen von Brune

Es sei X die Anzahl der Fluggäste, die erscheinen. Dann gilt $X \sim \text{Bin}(n, p)$ mit $n = 205$ und $p = 0,85$. Es gilt $\mathbb{E}X = np$ und $\text{Var}(X) = np(1 - p)$ (0.5P)

Dann ist

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

approximativ standardnormalverteilt (0.5P) (dieser Schritt kann natürlich auch erst in den Rechnungen gemacht werden)

a)

Wir rechnen unter Verwendung der Tabelle zur Normalverteilung

$$\mathbb{P}(X \leq 180) = \mathbb{P}\left(X^* \leq \frac{180 - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{180 - 205 \cdot 0,85}{\sqrt{205 \cdot 0,85 \cdot 0,15}}\right) \approx \Phi(1,12) = 0,8686.$$

(1P)

b)

Es sei wieder X die Anzahl der erscheinenden Fluggäste. X ist wieder Binomialverteilt mit unbekanntem n . Es soll aber $\mathbb{P}(X \leq 180) \geq 0,99$ gelten. (0.5P) Also

$$0,99 \leq \mathbb{P}(X \leq 180) = \mathbb{P}\left(X^* \leq \frac{180 - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{180 - n \cdot 0,85}{\sqrt{n \cdot 0,85 \cdot 0,15}}\right)$$

(1P)

Mithilfe einer Quantiltabelle der Standardnormalverteilung erhält man $\Phi(2,326) = 0,99$. Somit gilt

$$2,326 \leq \frac{180 - n \cdot 0,85}{\sqrt{n \cdot 0,85 \cdot 0,15}}.$$

Auflösen liefert $n \leq 198,01$. (1P) Also sollten höchstens 198 Buchungen angenommen werden. c)

$$\mathbb{P}(X \leq 180,5) = \mathbb{P}\left(X^* \leq \frac{180,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{180,5 - 205 \cdot 0,85}{\sqrt{205 \cdot 0,85 \cdot 0,15}}\right) \approx \Phi(1,22) = 0,8888. \quad (0.5 \text{ P})$$

*Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): **Mittwoch, 15. Dezember, 13:00 Uhr***

Viel Erfolg! :)