

Übungsblatt 4

Aufgabe P1 *Wechsel von 01ern.*

- a) Denken Sie sich fünf 10-stellige zufällige Folgen von 0en und 1en aus.
- b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Wechslen von 0 auf 1 und 1 auf 0 bei einer reinzufälligen (=Laplace) gewählten 10 stelligen Folge von 0en und 1en. (Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie bei dem Beispiel mit den Seeleuten aus der Vorlesung vor). Berechnen Sie die Anzahl von Wechslen der Folgen aus Teil a) und setzen Sie diese in Beziehung zu dem Ergebnis. Vergleichen Sie auch die Werte Ihrer Mitstudierende.
- c) Berechnen Sie die Varianz der Anzahl der Wechsel.

Aufgabe P2 *Gemeinsame Verteilung.*

Es sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor mit Verteilung $p_{ij} := \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ gemäß folgender Tabelle.

$i \setminus j$	0	1
0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	

- a) Bestimmen Sie den fehlenden Wert in der Tabelle so, dass X und Y jeweils nur die Werte 0 und 1 mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen.
- b) Ermitteln Sie die Randverteilungen von (X, Y) in der Form $\mathbb{P}(X = i) = \dots$, $\mathbb{P}(Y = j) = \dots$ für alle in Frage kommende Werte von i bzw. j .
- c) Zeigen Sie, dass hier $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ gilt. **Hinweis:** Zur Berechnung von $\mathbb{E}[XY]$ können Sie die Formel aus Aufgabe P3 benutzen.

Aufgabe P3 .

Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum und außerdem $f : W_X \times W_Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $\mathbb{E}[f(X, Y)]$ existiert. Beweisen Sie die Formel

$$\mathbb{E}[f(X, Y)] = \sum_{x \in W_X, y \in W_Y} f(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Hinweis: Definieren Sie $Z := f(X, Y)$ und orientieren Sie sich an Bemerkung 1.48.

Lösung: Wir definieren $Z = f(X, Y)$.

Nun gilt

$$\mathbb{E}[f(X, Y)] = \mathbb{E}[Z] = \sum_{z \in W_Z} z \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{z \in W_Z} z \mathbb{P}(f(X, Y) = z).$$

Weiter können wir schreiben

$$\mathbb{P}(f(X, Y) = z) = \mathbb{P}((X, Y) \in f^{-1}(\{z\})) = \sum_{(x, y) \in f^{-1}(\{z\})} \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$$

wobei $f^{-1}(\{z\}) = \{(x, y) \in W_X \times W_Y : f(x, y) = z\}$. Also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X, Y)] &= \sum_{z \in W_Z} z \sum_{(x, y) \in f^{-1}(\{z\})} \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) \\ &= \sum_{z \in W_Z} \sum_{(x, y) \in f^{-1}(\{z\})} z \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{z \in W_Z} \underbrace{\sum_{(x, y) : f(x, y) = z} f(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y)}_{= \sum_{x \in W_X, y \in W_Y} f(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y)} \\ &= \sum_{x \in W_X, y \in W_Y} f(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y) \end{aligned}$$

Aufgabe H1 *Varianz und Kovarianz.*

Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass

a) $\text{Var}(X + Y) + \text{Var}(X - Y) = 2 \text{Var}(X) + 2 \text{Var}(Y).$

Nun gelte $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ und $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$, sowie $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X^2, Y) = \text{Cov}(X^2, Y^2) = 0$. Bestimmen Sie

b) $\text{Var}(X + 2Y - 1)$

c) $\text{Var}(X + XY)$

Lösung: Insgesamt fünf Punkte.

a) Es gilt mit dem Satz über die Varianz von Summen (Satz 1.67), dass

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) + \text{Var}(X - Y) \\ = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(X) + \text{Var}(-Y) + 2 \text{Cov}(X, -Y). \end{aligned}$$

Nun folgt aber direkt aus den Definitionen, dass $\text{Var}(-Y) = \text{Var}(Y)$ und $\text{Cov}(X, -Y) = -\text{Cov}(X, Y)$. Das obige gleicht also

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y) \\ = 2 \text{Var}(X) + 2 \text{Var}(Y). \end{aligned}$$

(1,5P)

b) Es sei zunächst bemerkt, dass durch $\mathbb{E}[X] = 0$ gilt, dass $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2]$, und für Y analog. Es gilt mit dem Satz 1.61 (Varianz von affin linear transformierten Zufallsvariablen), dass

$$\text{Var}(X + 2Y - 1) = \text{Var}(X + 2Y)$$

und zusätzlich mit Satz 1.67 (Varianz von Summen), dass

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + 2Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(2Y) + 2 \text{Cov}(X, 2Y) \\ &= \text{Var}(X) + 4 \text{Var}(Y) + 4 \text{Cov}(X, Y) \\ &= \text{Var}(X) + 4 \text{Var}(Y) = 5 \end{aligned}$$

wobei wir auch benutzt haben, dass $\text{Cov}(X, Y) = 0$. (1,5P)

c) Es gilt unter anderem durch Anwendung der oben genannten Sätze, dass

$$\text{Var}(X + XY) = \text{Var}(X) + \text{Var}(XY) + 2 \text{Cov}(X, XY).$$

Aus $\text{Cov}(X, Y) = 0$ folgt, dass $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$. Aus $\text{Cov}(X^2, Y^2) = 0$ folgt, dass $\mathbb{E}[X^2 Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$. Also

$$\text{Var}(XY) = \mathbb{E}[(XY)^2] - \mathbb{E}[XY]^2 = \mathbb{E}[X^2 Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] = \text{Var}(X) \text{Var}(Y) = 1.$$

Aus $\text{Cov}(X^2, Y) = 0$ folgt, dass $\mathbb{E}[X^2 Y] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y]$. Also

$$\text{Cov}(X, XY) = \mathbb{E}[X^2 Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = (\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2)\mathbb{E}[Y] = 0.$$

Also gilt insgesamt

$$\text{Var}(X + XY) = 1 + 1 + 0 = 2.$$

(2P)

Aufgabe H2 Gemeinsame Verteilung.

Es sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor mit Verteilung $p_{ij} := \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ gemäß folgender Tabelle.

$i \setminus j$	-1	0	1
-1	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
0	$\frac{3}{32}$	0	$\frac{7}{32}$
1	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{32}$

- Ermitteln Sie die Randverteilungen von (X, Y) in der Form $\mathbb{P}(X = i) = \dots$, $\mathbb{P}(Y = j) = \dots$ für alle in Frage kommenden Werte von i bzw. j .
- Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$.
- Berechnen Sie $\text{Cov}(X, Y)$. **Hinweis:** Es gilt $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
- Berechnen Sie $\mathbb{E}[X|Y = 0]$

Lösung: Erstellt von Meier-Hans 10.11.2015

a) Insgesamt (1,5 Punkte), für 2 richtige jeweils 0,5.

Es gilt $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^3 \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ und $\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(X = i, Y = j)$. Somit folgt:

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{3}{32} + \frac{2}{32} + \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{3}{32} + 0 + \frac{7}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{7}{32} + \frac{4}{32} + \frac{5}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{7}{32} = \frac{13}{32}$$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{2}{32} + 0 + \frac{4}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{32} + \frac{7}{32} + \frac{5}{32} = \frac{13}{32}$$

b) Insgesamt (1,5 Punkt)

$$\mathbb{E}X = (-1) \cdot \frac{6}{32} + 0 \cdot \frac{10}{32} + 1 \cdot \frac{16}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

$$\mathbb{E}Y = (-1) \cdot \frac{13}{32} + 0 \cdot \frac{6}{32} + 1 \cdot \frac{13}{32} = 0$$

c) Insgesamt (1,5 Punkte), 1+0,5

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{3}{32} + 0 \cdot (-1) \cdot \frac{3}{32} + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{7}{32} \\ &\quad + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{2}{32} + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot \frac{4}{32} \\ &\quad + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{32} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{7}{32} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{32} = 0\end{aligned}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0 - 0 \cdot \frac{10}{32} = 0$$

d) 1,5 Punkte

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y=0] &= \sum_{x \in W_x} x \cdot \mathbb{P}(X=x|Y=0) = \sum_{x=-1}^1 x \cdot \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)} \\ &= (-1) \cdot \frac{1/8}{3/16} + 1 \cdot \frac{1/16}{3/16} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe H3 .

- a) Es seien X und Z diskrete Zufallsvariablen, sodass $\mathbb{E}[Z]$ existiert und $\mathbb{P}(X=x) > 0$ für alle $x \in W_X$. Beweisen Sie die Formel

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{x \in W_X} \mathbb{E}[Z|X=x]\mathbb{P}(X=x).$$

Hinweis: Sie können Satz 1.56 benutzen oder die Formel für den Erwartungswert umformen.

- b) Nun betrachten wir folgendes Experiment. Sie werfen einen sechsseitigen Würfel und notieren sich die Augenzahl als Zufallsvariable X . Nun werfen Sie eine Münze X -mal. Die Anzahl der Kopftreffer sei Y . Berechnen Sie $\text{Cov}(X, Y)$. Inwiefern ist das Ergebnis plausibel?

Hinweis: Sie können die gemeinsame Verteilung ausrechnen oder die Formel aus a) für $Z = XY$ bzw. $Z = Y$ benutzen.

Lösung: Insgesamt fünf Punkte.

- a) Variante I mit Satz 1.56: Da W_X abzählbar ist können wir als Zerlegung von Ω die Mengen $(A_i)_{i \geq 1} = (\{X=x\})_{x \in W_X}$ wählen. Dann gilt mit Satz 1.56, dass

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[Z|A_i]\mathbb{P}(A_i) = \sum_{x \in W_X} \mathbb{E}[Z|X=x]\mathbb{P}(X=x).$$

Variante II: Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Z] &= \sum_{z \in W_Z} z \cdot \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{z \in W_Z} z \sum_{x \in W_X} \mathbb{P}(Z = z, X = x) \\
 &= \sum_{z \in W_Z} \sum_{x \in W_X} z \cdot \mathbb{P}(Z = z, X = x) = \sum_{x \in W_X} \sum_{z \in W_Z} z \cdot \mathbb{P}(Z = z, X = x) \\
 &= \sum_{x \in W_X} \left(\sum_{z \in W_Z} z \cdot \frac{\mathbb{P}(Z = z, X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} \right) \mathbb{P}(X = x) \\
 &= \sum_{x \in W_X} \mathbb{E}[Z|X = x] \mathbb{P}(X = x).
 \end{aligned}$$

(2P)

b) Variante I: Wir berechnen es mit der Formel aus a):

Für $X = i$ ist Y die Anzahl der Kopftreffer nach i Münzwürfen. Damit ist $\mathbb{P}(Y = k|X = i) = \binom{i}{k} 2^{-i}$ (0,5P). Man kann entweder durch Ausrechnen (denn der Erwartungswert der Binomialvert. ist eventuell noch nicht bekannt) oder durch Erwartungswert der Binomialverteilung zeigen, dass

$$\mathbb{E}[Y|X = i] = \sum_{k=1}^i k \binom{i}{k} 2^{-i} = \begin{cases} \frac{1}{2} & : i = 1, \\ 1 & : i = 2, \\ \frac{3}{2} & : i = 3, \\ 2 & : i = 4, \\ \frac{5}{2} & : i = 5, \\ 3 & : i = 6, \end{cases}$$

(Es ist natürlich erlaubt ab hier mit $\mathbb{E}[Y|X = i] = i/2$ weiterzurechnen.) Man kann auch wie folgt vorgehen: Da für $X = i$ die Anzahl der Kopftreffer Y ist muss die Anzahl der Zahltreffer $i - Y$ sein. Aber die Anzahl der Kopftreffer und die Anzahl der Zahltreffer müssen die gleiche Verteilung haben. Also gilt $\mathbb{E}[Y|X = i] = \mathbb{E}[i - Y|X = i]$ und damit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y|X = i] &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[Y|X = i] + \mathbb{E}[i - Y|X = i]) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y + (i - Y)|X = i] \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[i|X = i] = \frac{i}{2}.
 \end{aligned}$$

(0,5P)

Wegen $\mathbb{P}(X = i) = 1/6$ gilt mit der Formel aus a) und $Z = XY$, dass

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[XY] &= \sum_{i \in W_X} \mathbb{E}[XY|X = i] \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i \in W_X} i \mathbb{E}[Y|X = i] \mathbb{P}(X = i) \\
 &= \sum_{i=1}^6 i \left(\sum_{k=1}^i k \binom{i}{k} 2^{-i} \right) \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 i \sum_{k=1}^i k \binom{i}{k} 2^{-i} \\
 &= \frac{1}{6} \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot 2 + 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 \cdot 3 \right) = \frac{91}{12}.
 \end{aligned}$$

(0,5P)

Mit der Formel aus a) und $Z = Y$ gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i \in W_X} \mathbb{E}[Y|X = i] \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \mathbb{E}[Y|X = i] \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 \right) = \frac{7}{4}.
 \end{aligned}$$

(0,5P)

Außerdem ist $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$. (0,5P)

Damit gilt $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{91}{12} - \frac{49}{8} = \frac{35}{24}$. (0,5P)

Variante 2: Die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$ und dann die Randverteilungen ausrechnen und dann alle Erwartungswerte ausrechnen. (Auch drei Punkte.)

Es ergibt Sinn, dass die Kovarianz positiv ist, da höhere Augenzahlen mehr Münzwürfe herbeiführen, wobei dann tendenziell mehr Kopftreffer entstehen. (Diese Frage sollte vor allem ein Gedankenanstoss sein und fließt in die Bewertung nicht ein.)

*Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): **Mittwoch, 17. November, 13:00 Uhr***

Viel Erfolg! :)