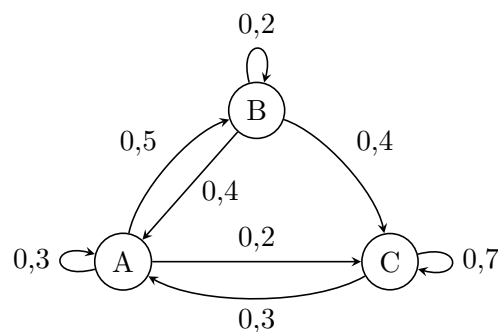


## Übungsblatt 13

### Aufgabe P1 *Markovketten via Übergangsgraph.*

Das folgende Übertragungsdiagramm beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Überganges von einem der Zustände  $A, B, C$  nach  $A, B, C$  eines Automaten vom Zeitschritt  $i - 1$  zum Zeitschritt  $i$  (siehe Abbildung). Der Systemzustand zur Zeit  $i$  werde mit  $X_i$  bezeichnet.



- Man stelle die Übergangsmatrix auf.
- Zur Zeit  $i = 0$  befinde sich das System mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit in den Zuständen  $A, B, C$ :

$$\pi_0 = (\mathbb{P}(X_0 = A) = 0,3; \mathbb{P}(X_0 = B) = 0,2; \mathbb{P}(X_0 = C) = 0,5).$$

Man Berechne

- $\mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = C | X_0 = B),$
- $\mathbb{P}(X_1 = B, X_2 = B, X_3 = C),$
- $\mathbb{P}(X_2 = B, X_0 = B).$

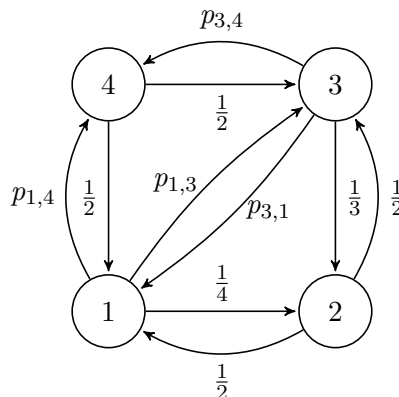
### Aufgabe P2 *MK aus fairem Münzwurf.*

Ein fairer Würfel wird wiederholt geworfen. Es sei  $X_n$  der Rest der Augensumme der ersten  $n$  Würfe bei Division durch 4, wobei wir  $X_0 = 0$  setzen.

- Zeigen Sie, dass  $X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Markov-Kette ist und bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix.
- Angenommen, man hat nach 7 Würfeln eine durch 4 teilbare Augensumme erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach zwei weiteren Würfeln eine Augensumme, die
  - wieder durch 4 teilbar ist,
  - bei Division durch 4 den Rest 3 liefert,
  - nicht durch 4 teilbar ist?

**Aufgabe H1** *Unvollständiger Übergangsgraph.*

Gegeben sei der folgende Übergangsgraph einer Markovkette  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit Zustandsraum  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ .



Dabei gelte  $p_{1,3} = p_{1,4}$  und  $p_{3,1} = \frac{1}{2}p_{3,4}$ .

- Bestimmen Sie die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten und geben Sie die Übergangsmatrix  $P$  zu der Markov-Kette  $X$  an.
- Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten, wenn als Startverteilung  $\alpha = \frac{1}{4}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$  vorgegeben ist:
  - $\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3 | X_0 = 4)$
  - $\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3)$
  - $\mathbb{P}(X_2 = 4 | X_0 = 1)$
  - $\mathbb{P}(X_2 = 4, X_0 = 1)$ .

---

**Lösung:** a) Wegen  $p_{1,3} = p_{1,4}$  und wegen  $\sum_{j=1}^4 p_{1,j} = \frac{1}{4} + 2p_{1,3} = 1$ , gilt  $p_{1,3} = p_{1,4} = \frac{3}{8}$ . Analog erhält man  $3p_{3,1} + \frac{1}{3} = 1$ , also  $p_{3,1} = \frac{2}{9}$  und  $p_{3,4} = \frac{4}{9}$ . [.5 Pkt] Damit lautet die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad [.5 Pkt]$$

b) Es gilt

$$\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3 | X_0 = 4) = p_{4,3} p_{3,2} p_{2,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}, \quad [1 \text{ pkt}]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3) &= \sum_{j=1}^4 \mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 3 | X_0 = j) \mathbb{P}(X_0 = j) \\ &= p_{1,3} p_{3,2} p_{2,1} \alpha_1 + p_{2,3} p_{3,2} p_{2,1} \alpha_2 + p_{3,3} p_{3,2} p_{2,1} \alpha_3 + p_{4,3} p_{3,2} p_{2,1} \alpha_4 \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{11}{192}, \quad [1.5 \text{ pkt}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 4 | X_0 = 1) &= \sum_{j=1}^4 \mathbb{P}(X_2 = 4, X_1 = j | X_0 = 1) = \sum_{j=1}^4 p_{1,j} p_{j,4} \\ &= p_{1,1} p_{1,4} + p_{1,2} p_{2,4} + p_{1,3} p_{3,4} + p_{1,4} p_{4,4} \\ &= 0 + 0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} + 0 = \frac{1}{6}, \quad [1.5 \text{ pkt}] \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 4, X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 4 | X_0 = 1) \mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}. \quad [1 \text{ pkt}]$$

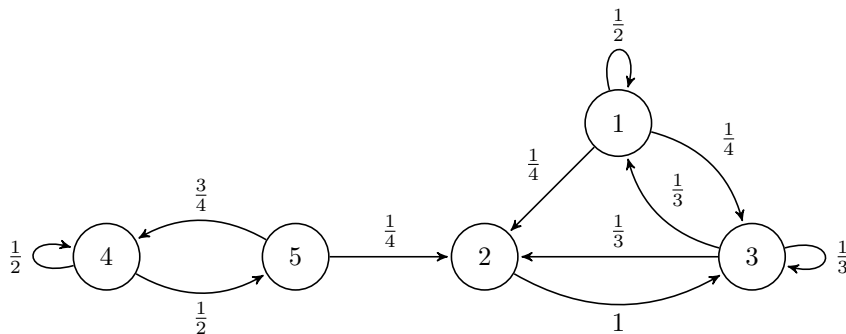
### Aufgabe H2 MK via Übergangsmatrix.

Gegeben sei eine Markov-Kette  $X := (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit Zustandsraum  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  und Übergangsmatrix

$$P = (p_{ij})_{i,j \in E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen zu  $X$ .
- b) Beantworten Sie folgenden Fragen mit entsprechender Begründung:
- (i) Gilt  $1 \rightsquigarrow 4$ ,  $5 \rightsquigarrow 1$  und  $5 \rightsquigarrow 5$ ?
  - (ii) Ist  $X$  irreduzibel?
  - (iii) Sind alle Zustände aperiodisch?

**Lösung:** a)



- b) (i) Es gilt nicht  $1 \rightsquigarrow 4$ , denn ist man einmal in einem der Zustände 1, 2 oder 3, so ist die Wahrscheinlichkeit 0, wieder zu den Zuständen 4 oder 5 zu gelangen. Es gilt aber  $5 \rightsquigarrow 1$  und  $5 \rightsquigarrow 5$ , denn  $p_{51}^{(3)} > 0$  (d.h. die Wahrscheinlichkeit ist positiv, nach drei Schritten von Zustand 5 nach Zustand 1 zu gelangen) und  $p_{55}^{(2)} > 0$  (d.h. die W'keit ist positiv, nach zwei Schritten zurück zu 5 zu gelangen). (ii)  $X$  ist nicht irreduzibel, da z.B. nicht gilt  $1 \rightsquigarrow 4$ . (iii) Es sind alle Zustände aperiodisch, da für alle  $i \in \{1, 3, 4\}$  gilt  $p_{ii}^{(1)} > 0$ , für alle  $j \in \{2, 5\}$  gilt  $p_{jj}^{(3)} > 0$  und für alle  $i \in E$  gilt  $p_{ii}^{(2)} > 0$ .
- 

### Aufgabe H3 MK aus Urnenmodell.

Eine Urne enthalte zum Zeitpunkt 0 eine weiße und eine schwarze Kugel. Beim Übergang vom Zeitpunkt  $n$  zu Zeitpunkt  $n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , wird eine Kugel zufällig und gleichverteilt ausgewählt, der Urne entnommen und mit einer weiteren Kugel der gezogenen Farbe zurückgelegt. Es sei  $X_n := (W_n, S_n)$ , wobei  $W_n$  die Anzahl der weißen und  $S_n$  die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Urne nach  $n$  Schritten bezeichnen. Dadurch erhält man eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $E = \mathbb{N}^2$ .

- a) Bestimmen Sie die zugehörigen (1-Schritt-)Übergangswahrscheinlichkeiten.  
b) Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\mathbb{P}(X_n = (k, n + 2 - k)) = \frac{1}{n + 1} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n + 1\}.$$

*Hinweis:* Nutzen Sie die Beweistechnik der vollständigen Induktion.

---

**Lösung:** a) Aus der Aufgabenstellung ist unmittelbar ersichtlich, dass man von  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  nur entweder zu  $(i + 1, j)$  oder zu  $(i, j + 1)$  gelangen kann. **(0,5 P.)** Also  $p_{(i,j)(i+1,j)} = \frac{i}{i+j}$  **(0,5 P.)** und  $p_{(i,j)(i,j+1)} = \frac{j}{i+j}$  **(0,5 P.)** für alle  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten sind 0. **(0,5 P.)**

b) Wir zeigen dies mittels vollständiger Induktion über  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n = 0$  kann nur  $k = 1$  sein und es ist  $\mathbb{P}(X_0 = (1, 1)) = 1$ . **(0,5 P.)** Betrachte nun  $n \rightarrow n + 1$ . Ist  $k = n + 2$ , so haben wir (wir gehen  $n + 1$ -mal nach rechts)  $\mathbb{P}(X_{n+1} = (n + 2, 1)) = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$ ; analog geht man für  $k = 1$  vor. **(1,5 P.)** Sei nun  $k \in \{2, \dots, n + 1\}$ . Dann ist nach Induktionsvoraussetzung und wegen der Markov-Eigenschaft

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = (k, n + 3 - k)) &= \mathbb{P}(X_n = (k, n + 2 - k)) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = (k, n + 3 - k) | X_n = (k, n + 2 - k)) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_n = (k - 1, n + 2 - (k - 1))) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = (k, n + 3 - k) | X_n = (k - 1, n + 3 - k)) \quad \textbf{(1 P.)} \\ &= \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{n + 2 - k}{n + 2} + \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{k - 1}{n + 2} = \frac{n + 2 - k + k - 1}{(n + 1)(n + 2)} = \frac{1}{n + 2} \quad \textbf{(1 P.).} \end{aligned}$$


---

Abgabe der Hausübungen: **Mittwoch, 2. Februar, 13:00 Uhr**

Viel Spaß! :)