

Übungsblatt 11

Aufgabe P1 *Schraubenlänge.*

Ein Großkunde kauft Schrauben direkt vom Hersteller. Der Hersteller gibt an, dass die Länge der Schrauben produktionsbedingt schwankt und die Verteilung der Längen einer Normalverteilung mit Erwartungswert 20 mm und Varianz 0.01 mm^2 entspricht. Der Kunde hat den Verdacht, dass die gelieferten Schrauben nicht diesen Erwartungswert besitzen. Daher misst er bei 100 Schrauben die Länge exakt nach und erhält einen Mittelwert von 20.026 mm. Kann die Hypothese, dass die durchschnittliche Länge der Schrauben 20 mm beträgt, aufgrund dieser Stichprobe verworfen werden, wenn er eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 1% zulässt und

- (i) der vom Hersteller angegebenen Varianz glaubt.

Aufgabe P2 .

Eine Brauerei besitzt eine Abfüllanlage für Halbliterflaschen. Die in eine Flasche abgefüllte Menge in Liter sei dabei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt mit unbekanntem μ und aber bekanntem $\sigma^2 = 0.0009$.

- (i) Die Brauerei möchte aus naheliegenden Gründen nicht zuviel Bier in die Flaschen abfüllen. Eine Testreihe, bei der die Füllmengen von 200 Flaschen untersucht wurden, ergab

$$\bar{X} = 0.5051$$

Geben Sie einen Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ für die Hypothese $H_0 : \mu \leq 0,5$ an.

- (ii) Eine Verbraucherorganisation führt alternativ einen Test über die Füllmengen der Halbliter-flaschen der Brauerei durch. Sie untersuchte ebenfalls 200 Flaschen und erhielt

$$\bar{X} = 0.49486$$

Zu große Füllmengen stören die Verbraucherorganisation natürlich nicht. Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0.01$ die Hypothese $H_0 : \mu \geq 0,5$.

Aufgabe H1 *ML-Schätzer Normalverteilung.*

Sie haben $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Stichproben X_1, \dots, X_n einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilten Zufallsvariablen gegeben. Der Parameter μ sei bekannt. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für den Parameter σ . Überprüfen Sie, ob das Quadrat dieses Schätzers für σ ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist.

Lösung: Insgesamt fünf Punkte.

erstellt von Meier-Hans 03.12.2014

Diese Zufallsvariablen haben die Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Entsprechend lautet die Likelihood-Funktion

$$L(\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1P).$$

Zur leichten Differentiation betrachten wir den Logarithmus davon

$$\ln L(\sigma) = -n(\ln \sqrt{2\pi} + \ln \sigma) + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (0.5P).$$

Als Ableitung erhalten wir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} \quad (0.5P).$$

Nullsetzen und Auflösen liefert den Schätzer

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (0.5P).$$

Wir lassen es der einfacheren Notation halber so stehen.

Die zweite Ableitung lautet:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - 3 \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^4} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (0.5P).$$

Wertet man dies an $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$ aus, so erhält man $-\frac{2n^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$ und man sieht, dass dies negativ ist. Also muss es sich wirklich um ein Maximum handeln (1P).

Nun zeigen wir noch

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[(x_i - \mu)^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \text{Var}(X_1).$$

Also ist es ein erwartungstreuer Schätzer (1P).

Aufgabe H2 *Leuchtmittel.*

Eine Firma stellt Leuchtmittel her, wobei sie eine mittlere Brenndauer von mehr als 1500 Stunden garantiert. Die Standardabweichung der als normalverteilt angenommenen Brenndauer beträgt 25 Stunden. Zur Produktionsüberwachung werden von einem unabhängigen

Test-Institut 50 Leuchtmittel entnommen und eine mittlere Brenndauer von 1507 Stunden festgestellt. Sollte man aufgrund dieses Befundes den Herstellungsprozess unterbrechen, wenn eine Irrtumswahrscheinlichkeit α von

a) $\alpha = 0.05$ b) $\alpha = 0.01$

veranschlagt wird? Stellen Sie einen entsprechenden Test auf und beantworten Sie die Frage in Ihrer Testkonfiguration.

Lösung: Insgesamt fünf Punkte.

Lösung erstellt von Alexander Klump, 01.2022

Nach den gegebenen Informationen ist die Grundgesamtheit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\sigma = 25$, μ unbekannt, $n = 50$ und $\bar{x} = 1507$. (0.5P)

Wir zweifeln die Aussage des Herstellers an, daher setze $H_0 : \mu \geq \mu_0 = 1500$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0 = 1500$. (1P)

Die Teststatistik ist

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1) \quad (0.5P)$$

a) Da hier $\alpha = 0.05$ ist, ist das Ablehnungskriterium $T < z_{0.05}$ (0.5P). Es gilt hier

$$z_{0.05} = -1.6449 \quad (0.5P)$$

und

$$T = \frac{1507 - 1500}{25} \cdot \sqrt{50} = 1.98 \quad (0.5P)$$

Da das Ablehnungskriterium nicht erfüllt ist können wir H_0 nicht verwerfen (0.5P).

b) Hier ist $\alpha = 0.01$. Die Teststatistik bleibt gleich. Das Ablehnungskriterium ist $T < z_{0.01}$. Da $z_{0.01} < z_{0.05}$ ist direkt klar, dass wir hier auch nicht verwerfen können (1P).

Der Herstellungsprozess wird nicht unterbrochen.

Abgabe der Hausübungen: Mittwoch, 19. Januar, 13:00 Uhr

Viel Erfolg! :)