

## Übungsblatt 7

### Aufgabe P1 *Dichtetransformation.*

Sei  $X$  die Gleichverteilung auf dem Intervall  $(0, 1)$ .

- a) Bestimmen Sie die Verteilung von  $Y := X^2 + 1$ .
- b) Bestimmen Sie den Erwartungswert  $\mathbb{E}[Y]$ .

### Aufgabe P2 *Dichtefunktion.*

Betrachten Sie folgende Funktion:

$$f_X(t) = \begin{cases} t^2, & \text{wenn } -1 \leq t < 0, \\ \frac{4}{3} \cdot t, & \text{wenn } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Dichtefunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen  $X$  ist.

- a) Zeigen Sie, dass  $f$  die Dichtefunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen  $X$  ist.
- b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion  $F_X$
- c) Berechnen Sie  $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$ .
- d) Bestimmen Sie  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}(X)$ .

**Aufgabe H1** *Verteilungsfunktion.*

- a) Welche der folgenden Funktionen sind Verteilungsfunktionen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$F_1(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2 \sin x & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x \end{cases} \quad F_2(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin(2x) & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x \end{cases}$$

$$F_3(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} \sin x & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x \end{cases}$$

- b) Geben Sie alle Bedingungen an die Konstanten  $a, b, c$  an, damit die Funktion  $F_4$  eine Verteilungsfunktion ist.

$$F_4(x) := \begin{cases} 0 & x < \pi/4 \\ a & x = \pi/4 \\ bx + c & \pi/4 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < x \end{cases}$$

- c) Angenommen, es werde ein Punkt  $X$  der reellen Achse auf zufällige Weise so ausgewählt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Punkt im Intervall  $(a, b]$  liegt, gerade durch  $F(b) - F(a)$  beschrieben wird, wobei  $F$  eine gegebene Verteilungsfunktion ist. Geben Sie für beliebige Werte von  $u < v \in \mathbb{R}$  Formeln für die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Punkt  $X$
- im Intervall  $(u, \infty)$  liegt
  - im Intervall  $[u, v]$  liegt
  - exakt gleich  $u$  ist.
- d) Prüfen Sie für alle  $i = 1, 2, 3, 4$  für die  $F_i$  eine Verteilungsfunktion ist, nach, ob  $F_i$  eine Dichte haben kann. Wenn ja, dann geben Sie diese an.

**Aufgabe H2** *Exponentialverteilung.*

- a) Sei  $X$  exponentiell verteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ . Berechnen Sie die Dichtefunktion von  $e^X$ .
- b) Sei nun zusätzlich  $\lambda = 2$ . Berechnen Sie  $\mathbb{E}[e^X]$ .

**Aufgabe H3** *Stetige Dichten.*

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + cx & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 1 + kx & \text{für } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Überprüfen Sie ob Konstanten  $c, k \in \mathbb{R}$  existieren, sodass  $f$  und  $g$  Dichtefunktionen von stetigen Zufallsvariablen sind.

- b) Sofern sie existieren, geben Sie die entsprechenden Verteilungsfunktionen an und berechnen Sie  $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$ .
- c) Es sei  $X$  nun eine stetige Zufallsvariable mit Dichte  $f$ . Berechnen Sie die Dichte von  $Y := \log(1 + X)$  und den Erwartungswert  $\mathbb{E}[Ye^{-Y}1_{\{Y \leq 1\}}]$ .

*Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3):* **Mittwoch, 8. Dezember, 13:00 Uhr**

Viel Erfolg! :)