

Übungsblatt 4

Aufgabe P1 *Wechsel von 01ern.*

- a) Denken Sie sich fünf 10-stellige zufällige Folgen von 0en und 1en aus.
- b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Wechslen von 0 auf 1 und 1 auf 0 bei einer reinzufälligen (=Laplace) gewählten 10 stelligen Folge von 0en und 1en. (Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie bei dem Beispiel mit den Seeleuten aus der Vorlesung vor). Berechnen Sie die Anzahl von Wechslen der Folgen aus Teil a) und setzen Sie diese in Beziehung zu dem Ergebnis. Vergleichen Sie auch die Werte Ihrer Mitstudierende.
- c) Berechnen Sie die Varianz der Anzahl der Wechsel.

Aufgabe P2 *Gemeinsame Verteilung.*

Es sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor mit Verteilung $p_{ij} := \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ gemäß folgender Tabelle.

$i \setminus j$	0	1
0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	

- a) Bestimmen Sie den fehlenden Wert in der Tabelle so, dass X und Y jeweils nur die Werte 0 und 1 mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen.
- b) Ermitteln Sie die Randverteilungen von (X, Y) in der Form $\mathbb{P}(X = i) = \dots$, $\mathbb{P}(Y = j) = \dots$ für alle in Frage kommende Werte von i bzw. j .
- c) Zeigen Sie, dass hier $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ gilt. **Hinweis:** Zur Berechnung von $\mathbb{E}[XY]$ können Sie die Formel aus Aufgabe P3 benutzen.

Aufgabe P3 .

Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum und außerdem $f : W_X \times W_Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $\mathbb{E}[f(X, Y)]$ existiert. Beweisen Sie die Formel

$$\mathbb{E}[f(X, Y)] = \sum_{x \in W_X, y \in W_Y} f(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Hinweis: Definieren Sie $Z := f(X, Y)$ und orientieren Sie sich an Bemerkung 1.48.

Aufgabe H1 *Varianz und Kovarianz.*

Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass

a) $\text{Var}(X + Y) + \text{Var}(X - Y) = 2 \text{Var}(X) + 2 \text{Var}(Y)$.

Nun gelte $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ und $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$, sowie $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X^2, Y) = \text{Cov}(X^2, Y^2) = 0$. Bestimmen Sie

b) $\text{Var}(X + 2Y - 1)$

c) $\text{Var}(X + XY)$

Aufgabe H2 *Gemeinsame Verteilung.*

Es sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor mit Verteilung $p_{ij} := \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ gemäß folgender Tabelle.

$i \backslash j$	-1	0	1
-1	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
0	$\frac{3}{32}$	0	$\frac{7}{32}$
1	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{32}$

a) Ermitteln Sie die Randverteilungen von (X, Y) in der Form $\mathbb{P}(X = i) = \dots$, $\mathbb{P}(Y = j) = \dots$ für alle in Frage kommenden Werte von i bzw. j .

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$.

c) Berechnen Sie $\text{Cov}(X, Y)$. **Hinweis:** Es gilt $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X|Y = 0]$

Aufgabe H3 .

a) Es seien X und Z diskrete Zufallsvariablen, sodass $\mathbb{E}[Z]$ existiert und $\mathbb{P}(X = x) > 0$ für alle $x \in W_X$. Beweisen Sie die Formel

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{x \in W_X} \mathbb{E}[Z|X = x] \mathbb{P}(X = x).$$

Hinweis: Sie können Satz 1.56 benutzen oder die Formel für den Erwartungswert umformen.

- b) Nun betrachten wir folgendes Experiment. Sie werfen einen sechsseitigen Würfel und notieren sich die Augenzahl als Zufallsvariable X . Nun werfen Sie eine Münze X -mal. Die Anzahl der Kopftreffer sei Y .

Berechnen Sie $\text{Cov}(X, Y)$. Inwiefern ist das Ergebnis plausibel?

Hinweis: Sie können die gemeinsame Verteilung ausrechnen oder die Formel aus a) für $Z = XY$ bzw. $Z = Y$ benutzen.

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): **Mittwoch, 17. November, 13:00 Uhr**

Viel Erfolg! :)