

Übungsblatt 3

Aufgabe P1 *Erwartungswert und Varianz.*

Die Zufallsvariable X nehme die Werte 1, 2 und 3 mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{10}$ an. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[X^2]$.

Aufgabe P2 *Größte Augenzahl.*

Sie würfeln zweimal mit einem fairen Würfel und notieren die größte der beiden Augenzahlen.

- Geben Sie eine Zufallsvariable mit einem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum an, der die größte Augenzahl beschreibt.
- Geben Sie die zugehörige Zähldichte und Verteilungsfunktion an.
- Berechnen Sie die durchschnittliche größte Augenzahl.

Aufgabe P3 *Unabhängigkeit von Vereinigung.*

Es seien A , B , C und D unabhängige Ereignisse.

- Zeigen Sie direkt mit der Definition von Unabhängigkeit von Ereignissen, dass dann auch $A \cap B$, C und D unabhängig sind.
- Zeigen Sie direkt aus der Definition, dass dann auch $A \cup B$ und $C \cup D$ unabhängig sind.

Aufgabe H1 Codezahlen.

Bei einer 4-stelligen Code-Zahl wird jede Ziffer aus $\{0, \dots, 9\}$ gewählt.

- Geben Sie eine Zufallsvariable mit einem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum an, der die Anzahl der verschiedenen Ziffern der Codezahl beschreibt. (Die Code-Zahl 0272 besteht beispielsweise aus 3 verschiedenen Ziffern.)
- Geben Sie die zugehörige diskrete Dichtefunktion (Zähldichte) der ZV aus Teil a) an.
- Geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion der ZV aus Teil a) an.
- Geben Sie den Erwartungswert der zugehörigen ZV aus Teil a) an.

Lösung: Insgesamt sechs Punkte.

a) Sei $\Omega = \{0, \dots, 9\}^4$ die Menge der zufälligen Codezahlen. Mit $\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{10^4}$ und $\mathcal{A} = P(\Omega)$ ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $Y : \omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Y_i((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)) = \#\{\omega_1, \dots, \omega_4\}$ die ZV, die die Anzahl der verschiedenen Codezahlen angibt. (0,5 Punkt)

b) Sei $C_i \subseteq \Omega$ die Menge aller Codewörter, die aus genau i verschiedenen Ziffern bestehen. Wir rechnen die Mächtigkeit von C_i aus:

- Da $C_1 = \{(0, 0, 0, 0), \dots, (9, 9, 9, 9)\}$ ist $|C_1| = 10$. (0,5 Punkte)
- Ein Codewort aus C_2 besteht aus zwei verschiedenen Ziffern. Für die beiden Ziffern gibt es $\binom{10}{2}$ Möglichkeiten. Aus zwei Ziffern kann man 2^4 Codewörter bilden, wobei 2 Codewörter nur aus einer Ziffer bestehen. Insgesamt ist $|C_2| = \binom{10}{2}(2^4 - 2)$ (1 Punkte)
- Ein Codewort besteht aus 4 verschiedenen Ziffern. Für die Ziffern gibt es $\binom{10}{4}$ Möglichkeiten. Diese Ziffern kann man in $4!$ Arten anordnen. Damit ist $|C_4| = \binom{10}{4}4!$ (1 Punkte)
- Da es 10^4 Codewörter insgesamt gibt und $C_3 = \{0, \dots, 9\}^4 / (C_1 \cup C_2 \cup C_4)$ ist $|C_3| = 10^4 - |C_1| - |C_2| - |C_4| = 10^4 - 10 - \binom{10}{2}(2^4 - 2) - \binom{10}{4}4!$. Alternativ hätte man wie folgt vorgehen können (man beachte, dass bei C_3 eine Zahl doppelt vorkommt und die anderen Zahlen einfach): Es gibt $\binom{10}{3}$ Möglichkeiten 3 Zahlen aus 10 Zahlen auszuwählen. Es gibt 3 Möglichkeiten für die Zahl die doppelt vorkommt und für die Stellen an der die doppelte Zahl vorkommt gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten. Für die Stellen der kleineren der beiden übrigen Zahlen gibt es dann noch 2 Möglichkeiten. Also insgesamt: $|C_3| = \binom{10}{3}3\binom{4}{2}2$. (1,5 Punkte)

Somit gilt für die diskrete Dichtefunktion $f_Y : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow [0, 1]$:

$$f_Y(1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(C_1) = \frac{|C_1|}{|\{0, \dots, 9\}^4|} = \frac{10}{10^4} = 0.001$$

$$f_Y(2) = \mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(C_2) = \frac{|C_2|}{|\{0, \dots, 9\}^4|} = \frac{\binom{10}{2}(2^4 - 2)}{10^4} = \frac{630}{10^4} = 0.063$$

$$f_Y(3) = \mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(C_3) = \frac{|C_3|}{|\{0, \dots, 9\}^4|} = \frac{10^4 - 10 - \binom{10}{2}(2^4 - 2) - \binom{10}{4}4!}{10^4} = \frac{4320}{10^4} = 0.432$$

$$f_Y(4) = \mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(C_4) = \frac{|C_4|}{|\{0, \dots, 9\}^4|} = \frac{\binom{10}{4}4!}{10^4} = \frac{5040}{10^4} = 0.504$$

(0,5 Punkte)

c) Es ist $F_Y : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.001 & 1 \leq x < 2 \\ 0.064 & 2 \leq x < 3 \\ 0.496 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

(0,5 Punkte)

d) Es gilt

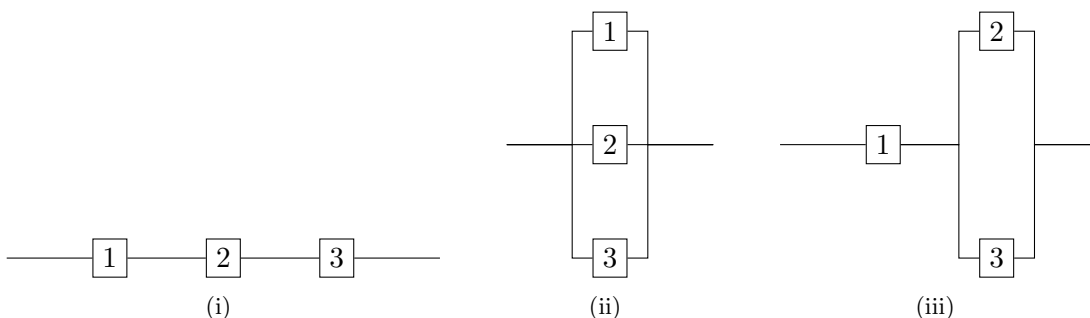
$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^4 i \cdot f_Y(i) = \frac{10}{10^4} + 2 \cdot \frac{630}{10^4} + 3 \cdot \frac{4320}{10^4} + 4 \cdot \frac{5040}{10^4} = \frac{3439}{1000}$$

(0,5 Punkte)

Aufgabe H2 Netzwerke.

Betrachten Sie jeweils die drei folgenden Netzwerke mit jeweils drei Komponenten. Sei jeweils A_j das Ereignis, dass die Komponente j ausfällt.

- a) Drücken Sie für jedes Netzwerk durch die Ereignisse A_1, A_2, A_3 aus, dass es eine Verbindung von links nach rechts gibt.
- b) Sei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Komponente ausfällt 0,3. Die Komponenten fallen unabhängig voneinander aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Verbindung von links nach rechts gibt.



Lösung: a)

(i) $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$ (ii) $A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c$ (iii) $A_1^c \cap (A_2^c \cup A_3^c)$

b)

(i) $\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c)\mathbb{P}(A_3^c) = 0,7^3 = 0,343$

(ii) Es gilt mit den Regeln von De Morgan: $\mathbb{P}(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c) = 1 - \mathbb{P}((A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c)^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = 1 - 0,3^3 = 0,973$ (alternativ Siebformel verwenden).

(iii) $\mathbb{P}(A_1^c \cap (A_2^c \cup A_3^c)) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2^c \cup A_3^c) = \mathbb{P}(A_1^c)(\mathbb{P}(A_2^c) + \mathbb{P}(A_3^c) - \mathbb{P}(A_2^c \cap A_3^c)) = \mathbb{P}(A_1^c)(\mathbb{P}(A_2^c) +$

$$\mathbb{P}(A_3^c) - \mathbb{P}(A_2^c)\mathbb{P}(A_3^c) = 0,7 \cdot (0,7 + 0,7 + 0,7 \cdot 0,7) = 0,637$$

Aufgabe H3 .

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \subseteq \Omega$. **Beweisen Sie oder widerlegen Sie** die folgenden Aussagen:

- a) A, B sind stochastisch unabhängig und $\mathbb{P}(C) > 0$. Daraus folgt $\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A | C)\mathbb{P}(B | C)$
- b) Sei $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Aus $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A | B^c)$ folgt, dass A, B unabhängig sind.
- c) Seien A, B und A, C stochastisch unabhängig. Dann sind auch $A, B \cup C$ stochastisch unabhängig.

Lösung: Insgesamt vier Punkte.

(a) Dies ist im Allgemeinen falsch. Betrachte $\Omega = \{0, 1\}^2$ mit $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. (zweifachen Münzwurf, 1 = Kopf, 0 = Zahl) Weiter sei $A = \{(1, 0), (1, 1)\}$ (erste Münze Kopf) und $B = \{(0, 1), (1, 1)\}$ (zweite Münze Kopf) und $C = \{(0, 1), (1, 0)\}$ (beide Münzen unterschiedlich). Dann sind A, B unabhängig:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1, 1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Aber:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A | C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(\{(1, 0)\})}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(B | C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(\{(0, 1)\})}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A \cap B | C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(C)} = 0\end{aligned}$$

Damit $\mathbb{P}(A \cap B | C) \neq \mathbb{P}(A | C)\mathbb{P}(B | C)$ (1 Punkte)

(b) Da aus $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A | B^c)$ folgt:

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)}$$

und daraus

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)}{1 - \mathbb{P}(B)}$$

umgeformt erhält man:

$$\mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) = (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B))\mathbb{P}(B)$$

zieht man auf beiden Seiten $\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(B)$ ab, so erhält man $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (2 Punkte)

(c) Diese Aussage ist falsch. Wähle wieder das Beispiel aus der Lösung (a). Dann ist

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

aber

$$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(\{(1, 0), (1, 1)\}) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)$$

(1 Punkt)

Abgabe der Hausübungen (Aufgaben H1 bis H3): **Mittwoch, 10. November, 13:00 Uhr**

Viel Erfolg! :)